


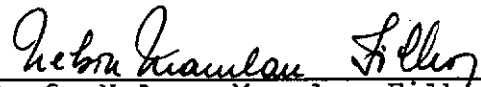
UM MODELO MARKOVIANO PARA SIMULAÇÃO
DE VAZÕES DIÁRIAS


GERMANO DE ALBUQUERQUE ANDRADE

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVER
SIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS RE
QUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:


Prof. Dirceu Machado Olive
Presidente


Prof. Nelson Maculan Filho


Prof. Rui Carlos V. da Silva


Prof. João Lizardo R.H. Araujo

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
SETEMBRO DE 1972

SUMÁRIO

Pesquisa de um modelo para simular vazões diárias, com base na teoria das cadeias de Markov.

Para esse fim, a sucessão histórica das vazões é analisada como processo de 1a. e 2a. ordem, sendo que, em ambos os casos determina-se a ergodicidade da cadeia e sua distribuição estacionária.

Analisa-se um ajustamento teórico para as linhas das matrizes markovianas, usando-se os índices de Pearson e testando-se as distribuições gama, normal e lognormal.

São observados separadamente os períodos "seco" e "molhado" do ano hidrológico e as séries simuladas são comparadas com as históricas correspondentes, com a finalidade de indicar o processo melhor ajustável ao período observado.

ABSTRACT

Research of a model to simulate dayly flows under the base of Markov's chains theory.

To reach this goal, a historic sucession of mentioned flows is analysed as a first and second order process prevailing that, for both cases, the chain ergodicity is determined and its stationary distribution is observed.

A theoretic adjustment for markovian matrix lines is analysed through Pearson's indexes, drying out gama, normal and lognormal distributions.

Dry and wet periods of the hydrologic year are observed separately, while simulated series are compared with the corresponding historics in order to point out the best adjustable process for the period under analysis.

INDICE

pg.

I. INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações gerais	1
1.2 - métodos empregados na pesquisa de Modelos Hidrológicos	2
1.3 - Objetivos	3

II. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

2.1 - Generalidades	4
2.2 - Classificação dos Processos Es- tocásticos	5
2.3 - Aplicação às Séries Hidrológi- cas	5
2.4 - Distribuição de Probabilidade Condicional no IR_n	6
2.5 - Processos Markovianos de 1a e 2a. ordem	10
2.6 - Probabilidade de Transição em n-Etapas	13
2.7 - Vetor distribuição de Probabi- lidade	14

III. CONSTRUÇÃO DOS MODELOS HIDROLÓGICOS

3.1 - Formação das matrizes de tran- sição	17
3.2 - Observações sobre as matrizes de transição	29
3.3 - Sucessão Hidrológica como Ca- deia Irredutível	31

3.4 - Cálculo da Distribuição Estacionária da série de Vazões	32
3.5 - Testes da Distribuição das linhas das Matrizes de Transição	36
3.6 - Resultados e Conclusões dos testes	39
3.7 - Simulação através dos Modelos de 1a. e 2a. ordem	44

IV. ESTUDO COMPARATIVO DAS SÉRIES REAIS E SIMULADAS

4.1 - Séries reais e simuladas	46
4.2 - Diagramas	47
4.3 - Conclusões	51
4.4 - Considerações finais	52

V. APÊNDICE

VI. BIBLIOGRAFIA

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

À COPPE, nas pessoas dos Professores Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, Chefe do Programa de Engenharia Civil, Rui Carlos Vieira da Silva, Chefe da Área de Hidráulica, Dirceu Machado Olive pela orientação e João Lizardo R. H. Araujo, pelas sugestões no trato com as Cadeias de Markov.

À Universidade Federal da Paraíba, nas pessoas dos Professores Serafim Rodrigues Martinez, Vice-Reitor, Vitoriano Gonzales y Gonzales e Newton Maia, respectivamente Diretor e Chefe do Departamento de Hidráulica da Escola de Engenharia.

À Escola Técnica Federal da Paraíba nas pessoas do Diretor, Professor Itapoan Botto Targino e do Chefe do Departamento de Mecânica, Professor José Maria Fonsêca.

Particularmente agradece a Maria de Lourdes de Almeida pelo serviço datilográfico.

A memória de meu pai,
A minha mãe, esposa e filhos,
A Licinha

PRINCIPAIS SÍMBOLOS USADOS

$F(.)$	Função distribuição de probabilidade
$p(.)$	Função de probabilidade
i_t	Estado da cadeia markoviana relativo ao tempo t
P_{ij}	Probabilidade de transição para o estado j dado o estado i , em uma etapa
P_{ijk}	Probabilidade de transição para o estado k dados (i, j) , em uma etapa
$P_i^{(n)}$	Probabilidade absoluta ou marginal de i no instante n
$P_{ij}^{(n)}$	Probabilidade absoluta ou marginal de i, j no instante n
$\pi_i^{(n)}$	Vetor distribuição de probabilidade no instante n (processo de 1a. ordem)
$\pi_{ij}^{(n)}$	Vetor distribuição de probabilidade de (ij) no instante n (processo de 2a. ordem)
$\{x_t\}$	Espaço amostral das vazões reais
ξ_t	Evento aleatório relativo ao instante t
$\{\xi_t\}_n$	n -ésima realização do processo

I. INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

O planejamento e desenvolvimento de projetos hidráulicos necessitam fundamentalmente do conhecimento das séries históricas hidrometeorológicas, sendo de suma importância para esses projetos, aquela que caracteriza o regime do rio ou seja, a sequência das vazões relativas ao tempo.

A análise de sequências desse tipo (denominadas séries temporais) pode determinar a estrutura do processo hidrológico, permitindo averiguar as características do fenômeno gerador da série [8]. Assim pode-se obter uma representação matemática (ou modelo matemático) para o fenômeno, que permitirá reproduzi-lo, resultando uma série temporal simulada. Isso constituirá a meta dessa pesquisa.

As vantagens dessas representações matemáticas, evidenciam-se pelo grande número de modelos existentes no campo da hidrologia, nos quais os pesquisadores procuram otimizar os processos adotados e assim, conseguir de maneira racional, realizar a simulação ou a previsão das séries hidrometeorológicas.

lógicas, isto é, "a formulação das inferências a respeito do comportamento futuro dos fatos que constituem a matéria em estudo", (ref. [7]).

1.2 - MÉTODOS EMPREGADOS NA PESQUISA DE MODELOS HIDROLÓGICOS

Segundo BHUIYA [8] , há tres formas de construir modelos hidrológicos:

1. através de esquemas paramétricos usando funções empíricas características das condições particulares da bacia;
2. através de esquemas puramente probabilísticos, nos quais o processo é considerado como estocástico;
3. combinando esquemas paramétricos e probabilísticos de forma que o processo seja constituído pela soma de duas componentes - uma paramétrica e outra estocástica.

A segunda forma será utilizada nessa pesquisa onde consideraremos a sequência de vazões diárias como um processo estocástico.

1.3 - OBJETIVOS

São objetivos do presente trabalho:

1. Elaboração e programação, em computador digital, de um algoritmo que modele uma série hidrológica (série das vazões diárias), por cadeias de Markov de 1a. e 2a. ordem.
2. Verificação da propriedade irredutível da cadeia e determinação da sua distribuição estacionária.
3. Pesquisa de uma distribuição teórica para as séries de frequência formadoras da matriz de transição correspondente ao processo adotado.
4. Simulação do período observado através dos modelos de 1a. e 2a. ordem, construídos com dados dos rios Juquiã (SP) e Grande (MG).
5. Estudo comparativo dos modelos, visando verificar se descrevem adequadamente o processo físico e qual deles se ajusta melhor aos dados. Subsidiariamente, análise de um número modesto de simulações, visando sua futura utilização em problemas de planejamento.

II. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

2.1 - GENERALIDADES

2.1.1 - Definição

Denomina-se processo estocástico aos fenômenos sequenciais cuja evolução é determinada por leis probabilísticas.

Considerando o evento aleatório ξ_t relativo ao instante t , as sequências $\{\xi_t, t \in T\}$ formam uma família de realizações do processo, tendo a particularidade de apresentar sucessões distintas para cada período de observação. Assim sendo, $\{\xi_t\}$ é uma variável aleatória n -dimensional.

2.1.2 - Caracterização

O processo estocástico é caracterizado pelo conjunto de funções

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) &= \\ &= \Pr[\xi_{t_1} \leq x_1, \dots, \xi_{t_n} \leq x_n] \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t_1, \dots, t_n \in T \quad \text{e} \quad x_1, \dots, x_n \in \{x_t\}$$

que representam a família das funções distribuição de probabilidade de $\{\xi_t\}$

2.2 - CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

1. Segundo a estrutura de $\{\xi_t\}$, o processo estocástico pode ser:

- a) Estacionário se o conjunto de funções distribuição n-dimensionais for invariante com uma translação no tempo, ou seja se:

$$F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n, t_1 + \epsilon, \dots, t_n + \epsilon)$$

para qualquer $t_1, t_1 + \epsilon, \dots, t_n, t_n + \epsilon \in T$.

- b) Segundo a natureza do sistema relativamente ao espaço amostral $\{x_t\}$ e ao período de observação T , classifica-se esses processos como:

- i. contínuo no espaço e no tempo
- ii. contínuo no espaço e discreto no tempo
- iii. discreto no espaço e no tempo
- iv. discreto no espaço e contínuo no tempo

2.3 - APLICAÇÃO ÀS SÉRIES HIDROLÓGICAS

No caso particular das vazões diárias, numa dada seção de um rio, consideraremos a sucessão histórica como um processo discreto no espaço e no tempo, sendo

$$\begin{aligned}\{x_t\} &= \{x \mid 0 \leq x \leq m\} \\ T &= \{0, 1, 2, \dots\}\end{aligned}$$

Como tais sucessões são sabidamente correlacionadas, foi aplicada a teoria das cadeias de Markov, fazendo-se maiores considerações sobre essa técnica, nos capítulos seguintes.

2.4 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CONDICIONAL NO \mathbb{R}_n

Se a variável aleatória ξ_t assume somente valores discretos ou seja se o espaço amostral é constituído dos valores $i_j \in \Pi^+$ ($j = 0, 1, \dots, n$) $T = 1, 2, \dots, n$ podemos construir a função denominada "função de probabilidade n-dimensional" representada por

$$p(i_1, \dots, i_n) = \Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n] \quad (2.1)$$

que dá uma completa descrição da distribuição de ξ_t [14].

A $p(i_1, \dots, i_n)$ satisfaz as seguintes condições:

$$1. \quad 0 \leq p(i_1, \dots, i_n) \leq 1.$$

$$2. \quad \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) = 1 \quad (2.2)$$

$$3. F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_1 \leq i_1} \dots \sum_{x_n \leq i_n} p(i_1, \dots, i_n)$$

Sendo $F(x_1, \dots, x_n)$ a função distribuição de probabilidade da citada variável aleatória.

Aplicando o conceito de distribuição de probabilidade marginal ou absoluta de cada variável aleatória podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_{i_1} &= \Pr[\xi_1 = i_1] = \sum_{i_2} \sum_{i_3} \dots \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) \\ P_{i_2} &= \Pr[\xi_2 = i_2] = \sum_{i_1} \sum_{i_3} \dots \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) \\ &\vdots \\ P_{i_n} &= \Pr[\xi_n = i_n] = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_{n-1}} p(i_1, \dots, i_n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Este conceito pode ser estendido a duas ou mais variáveis aleatórias ou seja:

$$\begin{aligned} P_{i_1, i_2} &= \Pr[\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2] = \sum_{i_3} \sum_{i_4} \dots \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) \\ P_{i_1, i_2, i_3} &= \Pr[\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \xi_3 = i_3] = \\ &\vdots = \sum_{i_4} \sum_{i_5} \dots \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) \\ &\vdots \\ P_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} &= \Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i_n} p(i_1, \dots, i_n) \quad (2.4)$$

Como as distribuições condicionais são rigorosamente relacionadas às distribuições n-dimensionais [2], podemos escrever:

$$p(i_n | i_1, \dots, i_{n-1}) = \Pr[\xi_n = i_n | \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}]$$

e aplicando a definição de probabilidade condicional temos:

$$\begin{aligned} p(i_n | i_1, \dots, i_{n-1}) &= \frac{\Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n]}{\Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}]} = \\ &= \frac{p(i_1, \dots, i_n)}{p(i_1, \dots, i_{n-1})} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde se conclui que:

$$\begin{aligned} p(i_1, \dots, i_n) &= P_{i_1, \dots, i_{n-1}} \cdot p(i_n | i_1, \dots, i_{n-1}) \\ &= P_{i_1, \dots, i_{n-2}} \cdot p(i_{n-1} | i_1, \dots, i_{n-2}) \cdot p(i_n | i_1, \dots, i_{n-1}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\
 & = P_{i_1} \cdot p(i_2|i_1) \cdot \\
 & \cdot p(i_3|i_1, i_2) \cdot \dots\dots p(i_n|i_1, \dots, i_{n-1}) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Em termos diretos de probabilidade teremos:

$$\begin{aligned}
 & \Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n] = \\
 & = \Pr[\xi_1 = i_1] \cdot \Pr[\xi_2 = i_2 | \xi_1 = i_1] \cdot \\
 & \cdot \Pr[\xi_3 = i_3 | \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2] \cdot \dots \cdot \\
 & \cdot \Pr[\xi_n = i_n | \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}] \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Nas aplicações práticas, em geral é complexa a determinação das funções condicionais da (2.7) [5]. Dois casos entretanto facilitam seu emprego.

1. Quando não há dependência estocástica entre os elementos de $\{\xi_t\}$, temos os processos independentes nos quais:

$$\begin{aligned}
 & \Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n] = \Pr[\xi_1 = i_1] \cdot \\
 & \cdot \Pr[\xi_2 = i_2] \cdot \dots \cdot \Pr[\xi_n = i_n]
 \end{aligned}$$

ou seja a probabilidade da cadeia é igual ao produto das probabilidades absolutas dos eventos.

2. No caso contrário, ou seja, quando há dependência entre os elementos de $\{\xi_t\}$ sendo a sucessão discreta no espaço e no tempo, temos os processos markovianos nos quais

$$\begin{aligned} \Pr[\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n] &= \Pr[\xi_1 = i_1] \cdot \\ \Pr[\xi_2 = i_2 | \xi_1 = i_1] &\cdot \Pr[\xi_3 = i_3 | \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2] \cdot \dots \\ \dots \cdot \Pr[\xi_n = i_n | \xi_{n-s} = i_{n-s}, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

isto é, a probabilidade da cadeia é igual ao produto das probabilidades condicionais até a ordem s ($s = 1, 2, \dots, m$).

No item que se segue, analisaremos os processos de 1a. e 2a. ordem com mais detalhes.

2.5 - PROCESSOS MARKOVIANOS DE 1a. e 2a. ORDEM

2.5.1 - Processos markovianos de 1a. ordem são aqueles nos quais o estado atual só depende do estado imediatamente anterior.

$$\begin{aligned} \Pr[\xi_n = i_n | \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}] &= \\ = \Pr[\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}] \end{aligned}$$

Dessa forma, todas as evoluções de estados podem ser representadas pela probabilidade condicional

$$p_{ij} = \Pr[\xi_t = j | \xi_{t-1} = i] \quad (2.9)$$

onde i, j representam qualquer estado de S . Nisso reside a grande vantagem dos processos markovianos dado as simplificações decorrentes.

A p_{ij} denominada probabilidade de transição em uma etapa, significa a "chance" de evolução do processo markoviano do estado i para o estado j em um instante ou etapa e é tal que:

$$1. \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \forall \quad i, j \in S$$

$$2. \quad \sum_{j=1}^r p_{ij} = 1 \quad \forall i$$

Os elementos p_{ij} podem ser arranjados em forma de matriz de ordem r , denominada matriz de transição do processo e representada por IP .

$$IP = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \vdots & & & \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix}_{r \times r} \quad (2.10)$$

A matriz que atende as condições 1 e 2 é denominada matriz estocástica de forma que toda matriz de transição tem essa classificação.

2.5.2 - Processos de 2a. ordem

São aqueles nos quais o estado atual depende do conhecimento de dois estados anteriores. Considerando o instante t e $i, j, k \in S$ e aplicando um raciocínio análogo ao do item anterior, podemos escrever:

$$P_{ijk} = \Pr[\xi_t = k | \xi_{t-1} = j, \xi_{t-2} = i] \quad (2.11)$$

A representação matricial desse processo (ver BAR - TLET [13]) tem a seguinte forma:

	11	12	...	1r	21	...	2r	...	rl	...	rr
11	P_{1111}	P_{1112}	...	P_{111r}	0	...	0	...	0	...	0
12	0	0	...	0	P_{1211}	...	P_{121r}	...	0	...	0
\vdots	\vdots										
1r	0	0	...	0	0	...	0	...	P_{1r11}	...	P_{1r1r}
21	P_{2111}	P_{2112}	...	P_{211r}	0	...	0	...	0	...	0
\vdots	\vdots										
2r	0	0	...	0	0	...	0	...	P_{2r11}	...	P_{2r1r}
\vdots	\vdots										
rl	P_{r111}	P_{r112}	...	P_{r11r}	0	...	0	...	0	...	0
\vdots	\vdots										
rr	0	0	...	0	0	...	0	...	P_{rr11}	...	P_{rr1r}

$r^2 \times r^2$

$$(2.12)$$

Onde os pares de índices, indicam estados associados ou seja:

$$P_{ijk} = P_{ij}, \quad j_k = \Pr[j_k | i_j] \quad (2.13)$$

Por essa razão são nulos os elementos cujos índices centrais são diferentes.

Essa notação é de grande importância para operar matricialmente os processos de 2a. ordem, como veremos nos capítulos seguintes.

2.6 - PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM N-ETAPAS

Define-se probabilidade de transição em n-etapas, a evolução do processo markoviano do estado i para o estado j (processo de 1a. ordem) ou (i, j) para o estado k (processo de 2a. ordem) após n transições.

Em linguagem formal

$$P_{ij}^{(n)} = \Pr[\xi_{t+n} = j | \xi_t = i]$$

$$P_{ijk}^{(n)} = \Pr[\xi_{t+n} = k | \xi_{t+1} = j, \xi_t = i]$$

Admitindo-se que a cadeia independe do instante t

podemos escrever:

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr[\xi_n = j \mid \xi_0 = i]$$

$$p_{ijk}^{(n)} = \Pr[\xi_n = j \mid \xi_1 = j, \xi_0 = i] \quad (2.14)$$

onde tomamos o instante inicial $t = 0$

2.7 - VETOR DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Sejam os vetores formados pela probabilidade marginal $(\Pr[\xi_t = i_j]) \quad t \in T, i_j \in S$.

Para $t = 0$ temos o vetor distribuição inicial dado por:

$$\pi_i^{(0)} = (\Pr[\xi_0 = i_1], \Pr[\xi_0 = i_2], \dots, \Pr[\xi_0 = i_r])$$

enquanto para $t = n$ temos o vetor distribuição no instante n ou seja:

$$\pi_i^{(n)} = (\Pr[\xi_n = i_1], \Pr[\xi_n = i_2], \dots, \Pr[\xi_n = i_r])$$

Em linguagem mais compacta:

$$\pi_i^{(n)} = (p_i^{(n)}) = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}) \quad (2.15)$$

Do conceito de distribuição marginal para dois estados, podemos escrever:

$$\Pr[\xi_1 = k] = \sum_j \Pr[\xi_0 = j] \cdot \Pr[\xi_1 = k | \xi_0 = j]$$

ou sob a forma de componentes:

$$P_k^{(1)} = \sum_j P_j^{(0)} \cdot p_{jk}$$

Através de raciocínio idêntico chega-se a expressão

$$P_k^{(n)} = \sum_j P_j^{(n-1)} p_{jk} \quad (2.16)$$

ou seja o vetor distribuição de probabilidade no instante n é o produto matricial do vetor distribuição no instante anterior pela matriz de transição em uma etapa.

Para os processos de 2a. ordem o vetor distribuição de probabilidade do par (i, j) no instante n será:

$$\pi_{ij}^{(n)} = (P_{11}^{(n)}, P_{12}^{(n)}, \dots, P_{1r}^{(n)}, P_{21}^{(n)}, \dots, P_{rr}^{(n)})$$

ou em função da matriz de transição p_{ijk} e sob a forma de componentes:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ki}^{(n-1)} p_{kij} \quad (2.17)$$

A distribuição absoluta do estado j nesse caso será:

$$P_j^{(n)} = \sum_i P_i^{(n-1)} \cdot p_{ij} \quad (2.18)$$

As equações (2.16) e (2.18) permitirão calcular as distribuições estacionárias dos processos adotados. No parágrafo 3.4 trataremos desse assunto.

III. CONSTRUÇÃO DOS MODELOS MARKOVIANOS

3.1 - FORMAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSIÇÃO

Inicialmente admitimos a sucessão de vazões como um processo discreto no espaço e no tempo e devido a dependência estocásticas dessas séries, pudemos utilizar a teoria vista no capítulo anterior, ou seja tratar essas sequências como cadeias markovianas.

Com a finalidade de obter melhor uniformidade na distribuição das vazões históricas, tomou-se para espaço amostral desses eventos, o conjunto:

$$\{x_t\} = \{a, b, \dots, m, n\}$$

no qual

$$a = \alpha_{vmin}$$

$$b = \alpha_a$$

$$\vdots$$

$$n = \alpha_m$$

sendo

$$vmax = \alpha_n$$

O conjunto de estados $\{S\} = \{1, 2, \dots, r\}$ associa-se ponto a ponto a $\{x_t\}$ de forma que:

$$v_{\min} \leq 1 \leq a$$

$$a < 2 \leq b$$

$$\vdots$$

$$m < r \leq v_{\max}$$

Foram observados separadamente os períodos "seco" e "molhado" do ano d'água empregando-se 25 anos de observações dos rios Juquiã (SP) e Grande (MG). Assim, determinou-se 24 sequências $\{\xi_t\}$ com 180 elementos cada uma. Para atender a tabela de Sturges (ref. [7]) para 180 pontos, utilizamos 8 intervalos de classe de forma que tomou-se $r = 8$ para o conjunto de estados.

As matrizes markovianas foram construídas considerando-se as primeiras 23 sequências $\{\xi_t\}$, de acordo com os seguintes algoritmos:

1. Para o processo de 1ª. ordem, os elementos p_{ij} são dados, aproximadamente, pela expressão (ver exemplos na TAB. 3.1.1):

$$p_{ij} \approx f_{ij} = \frac{fa(i, j)}{\sum_j fa(i, j)} \quad (3.1)$$

para qualquer i fixado e $j = 1, 2, \dots, r$ sendo fa , a frequência absoluta de transição do estado i para o estado j em uma etapa.

2. Para os processos de 2a. ordem, aplicamos um recurso que resultou em grande economia de "memória" ou seja, tratamos a (2.11) como tri-dimensional. Nessa hipótese a matriz de transição (2.12) foi arranjada em eixos tri-ortogonais da forma indicada na fig. 3.1.

Pode-se observar que nessas condições a ordem matricial é $r \times r \times r$ ou seja a "área de memória" a ocupar será muito menor do que aquela necessária para (2.12).

O ponto genérico p_{ijk} traduz a probabilidade da cadeia "evoluir" de (i, j) para k em uma etapa.

Os valores p_{ijk} são calculados pelo processo das frequências relativas e neste caso, a exemplo do anterior, a probabilidade aproximada será (ver exemplo na TAB.3.1.2):

$$p_{ijk} \approx f_{ijk} = \frac{fa(i,j,k)}{\sum_{k=1}^r fa(i, j, k)} \quad (3.2)$$

para cada i, j fixados e $k = 1, 2, \dots, r$.

É importante observar que processos de ordem mais e levada, podem ser também considerados, desde que a linguagem de programação empregada possa operar com blocos de quatro ou mais índices como no nosso caso, no qual utilizamos o Fortran G no IBM 360/40 do NCE/UFRJ que opera "matrizes" de até sete índices.¹

Nos processos práticos como o nosso, não acontecem transições de estados "distanciados" como (i) para (i+k), (k grande) ou o caso contrário. A observação das matrizes de frequência absoluta dos dados dos rios Juquã e Grande comprovam essa afirmativa (tabelas TAB 3.1/1,2,3 a seguir).

1 Nota do Prof. Nelson Maculan Filho - COPPE/UFRJ.

RIO JUQUIÁ - OUT/MAR								
ESTADOS	J							
I	1	2	3	4	5	6	7	8
1	169	50	9	0	0	0	0	0
2	57	790	169	36	3	1	0	0
3	0	197	591	157	31	3	0	0
4	0	4	201	484	124	34	0	0
5	0	0	11	166	268	76	7	0
6	0	0	0	11	103	202	39	0
7	0	0	0	0	3	41	96	6
8	0	0	0	0	0	0	5	19

RIO GRANDE - ABR/SET								
ESTADOS	J							
I	1	2	3	4	5	6	7	8
1	175	14	0	0	0	0	0	0
2	14	850	22	0	0	0	0	0
3	0	28	929	34	0	0	0	0
4	0	0	47	798	27	0	0	0
5	0	0	0	38	333	8	0	0
6	0	0	0	0	10	71	2	0
7	0	0	0	0	0	3	17	0
8	0	0	0	0	0	0	1	18

TAB. 3.1.1 - MATRIZ DE TRANSIÇÕES (PIJ)

RIO JUQUIÁ - OUT/MAR									
ESTADOS		K							
I	J	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	109	33	8	0	1	0	0	0
1	2	1	29	11	2	0	0	0	0
1	3	0	1	4	3	1	0	0	0
1	4	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	0	0	0	0	1	0	0	0
1	6	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7	0	0	0	0	0	0	0	0
1	8	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	37	9	1	0	0	0	0	0
2	2	43	556	107	25	3	1	0	0
2	3	0	25	83	42	8	2	0	0
2	4	0	1	5	11	12	5	0	0
2	5	0	0	1	0	0	2	0	0
2	6	0	0	0	0	0	1	0	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0	0
2	8	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	2	141	41	7	0	0	0	0
3	3	0	126	376	79	15	0	0	0
3	4	0	0	43	68	40	10	0	0
3	5	0	0	3	5	10	9	1	0
3	6	0	0	0	1	0	1	1	0

RIO JUQUIÁ - OUT/MAR									
ESTADOS		K							
I	J	1	2	3	4	5	6	7	8
3	7	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	0	3	0	0	0	0	0	0
4	3	0	39	129	32	4	1	0	0
4	4	0	0	102	335	57	16	0	0
4	5	0	0	1	36	62	28	3	0
4	6	0	0	0	1	4	19	10	0
4	7	0	0	0	0	0	0	0	0
4	8	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3	0	1	7	3	0	0	0	0
5	4	0	1	50	95	21	2	0	0
5	5	0	0	4	88	168	29	2	0
5	6	0	0	0	1	16	54	5	0
5	7	0	0	0	0	0	0	6	1
5	8	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	0	0	0	0	0	0	0	0
6	3	0	0	0	0	0	0	0	0
6	4	0	1	4	5	1	0	0	0

RIO JUQUIÁ - OUT/MAR									
ESTADOS		K							
I	J	1	2	3	4	5	6	7	8
6	5	1	0	2	39	54	9	1	0
6	6	0	0	0	6	70	113	20	0
6	7	0	0	0	0	0	10	27	2
6	8	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0	0	0	0
7	4	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	2	1	0	0	0
7	6	0	0	0	2	16	22	3	0
7	7	0	0	0	0	3	32	60	3
7	8	0	0	0	0	0	0	0	6
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	0	0	0	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0	0	0	0
8	5	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7	0	0	0	0	0	1	5	0
8	8	0	0	0	0	0	0	6	13

TAB. 3.1.2 - MATRIZ DE TRANSIÇÕES (PIJK)
RIO JUQUIÁ

RIO GRANDE - OUT/MAR									
ESTADOS		K							
I	J	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	70	10	1	1	0	0	0	0
1	2	0	13	0	0	0	0	0	0
1	3	0	0	3	0	0	0	0	0
1	4	0	0	0	1	0	0	0	0
1	5	0	0	0	0	0	0	0	0
1	6	0	0	0	0	0	0	0	0
1	7	0	0	0	0	0	0	0	0
1	8	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	5	3	1	0	0	0	0	0
2	2	9	211	41	0	0	0	0	0
2	3	1	3	38	3	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	0	0	0	0	0	0	0	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0	0
2	8	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	35	2	0	0	0	0	0
3	3	0	34	480	56	0	0	0	0
3	4	0	0	5	54	3	1	0	0
3	5	0	0	1	0	0	0	0	0
3	6	0	0	0	0	0	0	0	0

RIO GRANDE - OUT/MAR									
ESTADOS		K							
I	J	1	2	3	4	5	6	7	8
3	7	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0
4	2	0	0	0	0	0	0	0	0
4	3	0	0	52	4	1	0	0	0
4	4	1	0	52	687	63	2	0	0
4	5	0	0	0	11	50	10	0	0
4	6	0	0	0	3	0	4	0	0
4	7	0	0	0	0	0	0	0	0
4	8	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3	0	0	1	0	0	0	0	0
5	4	0	0	0	66	5	2	0	0
5	5	0	0	0	63	559	44	1	0
5	6	0	0	0	0	5	49	2	0
5	7	0	0	0	0	1	0	0	0
5	8	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	0	0	0	0	0	0	0	0
6	3	0	0	0	0	0	0	0	0
6	4	0	0	0	2	0	2	0	0

RIO GRANDE - OUT/MAR									
ESTADOS		K							
I	J	1	2	3	4	5	6	7	8
6	5	0	0	0	0	57	1	0	0
6	6	0	0	0	2	52	337	17	0
6	7	0	0	0	0	0	7	13	0
6	8	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0	0	0	0
7	4	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	0	1	0	0
7	6	0	0	0	0	1	18	1	0
7	7	0	0	0	0	0	13	44	2
7	8	0	0	0	0	0	0	0	2
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	0	0	0	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0	0	0	0
8	5	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7	0	0	0	0	0	0	2	0
8	8	0	0	0	0	0	0	2	19

TAB. 3.1.3

TAB. 3.1.3 - MATRIZ DE TRANSIÇÃO (PIJK)
(RIO GRANDE)

3.2 - OBSERVAÇÃO SOBRE AS MATRIZES DE TRANSIÇÃO

Analisando as matrizes segundo os exemplos das tabelas TAB. 3.1/1, 2, 3 podemos fazer as seguintes observações:

1. A matriz de 1a. ordem, apresenta valores consideráveis nas evoluções do estado (i) para os estados (j) = (i-2), (i-1), (i), (i+1) e (i+2) sendo muito pequena ou nula a ocorrência de evoluções para os demais estados. Isso se deve ao fato de não haver grandes alterações nas vazões diárias dos rios aqui analisados.

2. A matriz de 2a. ordem só apresenta valores consideráveis nas transições do estado (i) para os estados (j) = (i-1), (i), (i+1) e (k) = (i-2), (i-1), (i), (i+1) e (i+2). Dai se conclui que as variações bruscas atendendo aos limites referidos no item 2, dificilmente ocorrem por três dias consecutivos e que os picos de cheia são atingidos ou decrescem de forma lenta.

3. Em ambos os casos citados, o maior valor de F_i corresponde ao elemento p_{ij} (i = j) e p_{ijk} (i = j = k).

4. Do item 1 constatamos que nem todos os estados se comunicam na matriz de uma etapa. Foi verificado entretanto, que na 3a. etapa, isso deixa de ocorrer (todos são comunicantes)

de forma que podemos tratar a cadeia como irredutível e pesquisar uma distribuição estacionária única para a mesma.

5. Para o processo de 2a. ordem, surge uma dificuldade; alguns pares de estado nunca ocorrem. Temos assim, na matriz de transição, linhas e colunas correspondentes nulas, ou seja:

Se (i, j) não ocorre temos

$$P_{ijk} = P_{kij} = 0 \text{ para todo } k.$$

Devemos então, eliminar estas linhas e colunas; um modo prático de efetuar isto é dar probabilidade inicial zero a esses pares de estados.

Isso não afeta os resultados pois a probabilidade

na n -ésima etapa será:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ki}^{(n-1)} P_{kij}^{(n-1)} = 0$$

para todos os pares (i, j) que não ocorrem.

Testando a matriz assim reduzida, esta mostrou-se irredutível donde a distribuição estacionária é única.

3.3 - SUCESSÃO HIDROLÓGICA COMO CADEIA IRREDUTÍVEL DE MARKOV

Consideremos o comportamento do vetor distribuição de probabilidade absoluta $P_j^{(n)}$ para n grande.

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_j^{(n)} = u_j \quad j \in S$$

onde u_j é um vetor constante, diz-se que a cadeia é ergódica.

Da mesma forma para

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = u_{ij} \quad i, j \in S$$

no caso de processo de 2a. ordem.

Considerando então a cadeia como ergódica e fazendo $n \rightarrow \infty$ nas equações:

$$P_j^{(n)} = \sum_k P_k^{(n-1)} P_{kj}$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ki}^{(n-1)} P_{kij}$$

obtemos os vetores

$$u_i = \sum_k u_k p_{kj} \quad (3.3)$$

$$u_{ij} = \sum_k u_{ki} p_{kij} \quad (3.4)$$

Um vetor que satisfaz a equação (3.3) é denominado vetor distribuição estacionária do processo de 1a. ordem; satisfazendo a (3.4), tem-se o vetor distribuição estacionária do processo de 2a. ordem. Neste ponto, a cadeia atinge a denominação da distribuição limite que é única nos processos markovianos irredutíveis como o aqui tratado.

3.4 - CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA DA SÉRIE DE VAZÕES

A fim de operar as equações (3.3) e (3.4) tomou-se para vetor distribuição inicial

$$\pi_i^{(0)} = (P_i^{(0)})$$

onde $P_i = \frac{1}{n}$ (n = número de estados) no processo de 1a. ordem.

Para o processo de 2a. ordem levando em conta os pares (i j) que não ocorrem o vetor distribuição inicial será:

$$\pi_{ij}^{(0)} = (P_{ij}^{(0)})$$

Sendo

$$P_{ij}^{(0)} = 0$$

para as linhas nulas e

$$P_{ij}^{(0)} = \frac{1}{s} \quad (3.5)$$

no caso contrário, onde s = número de pares de estados que ocorrem.

Consideramos estacionários os vetores

$$a_i = P_i^{(n)} \quad \text{e} \quad a_{ij} = P_{ij}^{(n)} \quad \text{tais que:}$$

$$|P_i^{(n)} - P_i^{(n-1)}| \leq 0.001 \quad (3.6)$$

$$|P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(n-1)}| \leq 0.001$$

respectivamente para os processos de 1a. e 2a. ordem.

Neste último, a distribuição estacionária absoluta de acordo com (2.18) é

$$a_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} \quad (3.7)$$

Os resultados obtidos para os vetores distribuição estacionária, compõem a tabela TAB. 3.4 a seguir. Observa-se que estes vetores são muito próximos para as duas distribuições

em cada período observado, como era de se esperar.

A última linha da tabela se refere ao número de iterações necessárias para atingir a estacionaridade. Em todos os casos o valor de n é menor no processo de 2a. ordem como se verifica na tabela referida.

ESTADOS	RIO JUQUIÁ				RIO GRANDE			
	OUT/MAR		ABR/SET		OUT/MAR		ABR/SET	
	PIJ	PIJK	PIJ	PIJK	PIJ	PIJK	PIJ	PIJK
1	0.045	0.039	0.081	0.083	0.016	0.014	0.061	0.061
2	0.221	0.217	0.281	0.294	0.074	0.077	0.306	0.308
3	0.227	0.235	0.347	0.348	0.188	0.190	0.312	0.314
4	0.212	0.222	0.162	0.156	0.280	0.281	0.223	0.222
5	0.140	0.145	0.075	0.068	0.239	0.238	0.076	0.073
6	0.098	0.094	0.032	0.030	0.155	0.154	0.015	0.016
7	0.044	0.039	0.015	0.015	0.029	0.029	0.003	0.002
8	0.009	0.006	0.003	0.003	0.015	0.013	0.001	0.000
valor de n	28	23	39	34	34	31	89	85

TABELA 3.4 - DIST. ESTACIONÁRIA

3.5 - TESTES DA DISTRIBUIÇÃO DAS LINHAS DAS MATRIZES DE TRANSIÇÃO

Determinadas as frequências absolutas das evoluções do estado i (processo de 1a. ordem) ou (i, j) (processo de 2a. ordem) para qualquer dos outros estados, formam-se séries de frequência F_i correspondentes as linhas da matriz markoviana para as quais pesquisamos uma distribuição teórica.

Assim, a simulação da sequência histórica se faria através de um modelo probabilístico conhecido.

Com essa finalidade os seguintes testes foram realizados:

3.5.1 - Teste da Normal

Calculados os coeficientes de assimetria e curtose da série (X_i, F_i) , através do método dos momentos, verificou-se a simetria e o achatamento da curva. Admitindo-se um erro de 10%, a curva seria normal se

$$|AS| \leq 0.1$$

$$|CURT| \leq 0.1$$

e neste caso a frequência relativa teórica é dada por:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-u_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

onde u_x e σ_x são respectivamente a média e o desvio padrão da série particular analisada, calculados a partir do primeiro e segundo momento.

3.5.2 - Teste da Lognormal

Se o logarítmo da variável aleatória tem uma distribuição normal e se essa variável apresenta uma distribuição assimétrica positiva, tem-se a denominada distribuição lognormal.

Com base nessa definição, consideraremos lognormais as séries de frequência para as quais se tenha:

$$AS > 0$$

$$|ASL| \leq 0.1$$

$$|CURTL| \leq 0.1$$

Onde AS é o coeficiente de assimetria da variável aleatória; ASL, essa mesma característica, relativa ao logarítmo desta variável e CURTL o coeficiente de curtose da variável logaritmizada.

As frequências relativas teóricas para este caso, são dadas por:

$$f_t(\log x) = \frac{1}{V(\log x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log x - E(\log x)}{V(\log x)} \right)^2 \right] \quad (3.9)$$

3.5.3 - Teste da distribuição gama

Terão distribuição gama as séries de frequência para as quais

$$k = \frac{[E(X)]^2}{V(X)}$$

é inteiro.

Como a distribuição gama tende assintoticamente para a distribuição normal quando k cresce [3] consideraremos esse tipo de distribuição se:

$$(k - \alpha) \leq 4$$

sendo

$$\alpha = \frac{E(X)}{V(X)}$$

Neste caso as frequências relativas teóricas serão dadas por:

$$f_t(x) = \frac{\alpha^k x^{k-1} e^{-\alpha x}}{(k-1)!} \quad (3.10)$$

3.6 - RESULTADO E CONCLUSÕES DOS TESTES

Foram analisadas, de acordo com a teoria exposta em 3.5, todas as linhas das matrizes de 1a. ordem e as linhas principais das matrizes de 2a. ordem ou seja as linhas $(i, i-1)(i, i)$ e $(i, i+1)$ que apresentam valores consideráveis (ver TAB. 3.1.1 e TAB. 3.1.2). Nas tabelas TAB. 3.6.1, 3.6.2 e 3.6.3 se encontram os valores dos quatro primeiros momentos centrados na média, dos parâmetros desvio padrão, coeficiente de assimetria e curtose para as variáveis X e $\log x$ (relativas aos estados) além da distribuição sugerida para cada linha analisada.

Podemos observar que as séries de frequência não obedecem a nenhuma distribuição teórica pesquisada. Em vista disso, empregamos funções empíricas para as simulações tratadas nesse trabalho, como está descrito no parágrafo 3.7.

RIO JUQUIÁ - ABR/SET											
SÉRIE DE FREQUÊN- CIA	MOMENTOS				X			LOG(X)			DISTRIBUIÇÃO SUGERIDA
	1a.or.	2a.or.	3a.or.	4a.or.	DP	AS	CURT	DP	AS	CURT	
1	1.183	0.162	0.126	0.147	0.403	1.934	2.593	2.593	1.771	1.353	EMPIRICA
2	2.058	0.173	0.066	0.233	0.416	0.916	4.773	0.211	-1.052	5.363	EMPIRICA
3	3.066	0.235	0.165	0.641	0.485	1.444	8.543	0.157	-0.231	4.258	EMPIRICA
4	3.933	0.329	0.140	0.709	0.573	0.741	3.541	0.144	-0.111	1.317	EMPIRICA
5	4.883	0.521	0.152	1.005	0.722	0.403	0.691	0.148	-0.138	0.468	EMPIRICA
6	6.644	0.547	0.076	0.746	0.740	0.189	-0.511	0.111	-0.068	-0.370	EMPIRICA
7	6.633	0.485	0.047	0.618	0.696	0.140	-0.377	0.105	-0.123	-0.248	EMPIRICA
8	7.571	0.244	-0.034	0.064	0.494	-0.288	-1.916	-	-	-	EMPIRICA

TAB. 3.6.1 - PARÂMETROS DAS LINHAS PIJ

RIO GRANDE - ABR/SET											
SÉRIE DE FREQUÊN- CIA	MOMENTOS				X			LOG(X)			DISTRIBUIÇÃO SUGERIDA
	1a.or.	2a.or.	3a.or.	4a.or.	DP	AS	CURT	DP	AS	CURT	
1	1.074	0.068	-0.058	0.054	0.261	33.252	8.580	0.181	3.252	8.580	EMPIRICA
2	2.009	0.040	0.007	0.040	0.201	0.971	21.510	0.108	-2.835	28.599	EMPIRICA
3	3.006	0.062	0.004	0.062	0.250	0.314	12.960	0.086	-1.592	14.720	EMPIRICA
4	3.977	0.084	-0.017	0.083	0.290	-0.699	8.672	-	-	-	EMPIRICA
5	4.920	0.115	-0.051	0.100	0.339	-1.314	4.604	-	-	-	EMPIRICA
6	5.903	0.135	-0.056	0.115	0.367	-1.132	3.295	-	-	-	EMPIRICA
7	6.850	0.127	-0.089	0.078	0.357	-1.960	1.843	-	-	-	EMPIRICA
8	7.947	0.049	-0.044	0.042	0.223	-4.006	14.005	-	-	-	EMPIRICA

TAB. 3.6.2 - PARÂMETROS DAS LINHAS PIJ

RIO JUQUIÁ - OUT/MAR											
SÉRIE DE FREQUÊN- CIA	MOMENTOS				X			LOG(X)			DISTRIBUIÇÃO SUGERIDA
1	1.350	0.413	0.587	1.615	0.642	2.213	6.461	0.370	1.352	0.636	EMPIRICA
2	2.325	0.359	0.219	0.497	0.599	1.019	0.860	0.247	0.070	1.543	EMPIRICA
3	1.234	0.221	0.193	0.275	0.470	1.848	2.593	0.305	1.560	0.811	EMPIRICA
4	2.172	0.368	0.360	1.111	0.607	1.608	5.171	0.266	-0.195	2.893	EMPIRICA
5	3.243	0.671	0.337	1.658	0.819	0.613	0.674	0.253	-0.146	-0.118	EMPIRICA
6	2.277	0.294	0.230	0.413	0.542	1.441	1.759	0.216	0.697	1.766	EMPIRICA
7	2.971	0.443	0.160	0.762	0.666	0.542	0.872	0.226	-0.191	-0.066	EMPIRICA
8	4.105	0.752	0.238	1.358	0.867	0.265	-0.603	0.211	0.003	-0.935	EMPIRICA
9	3.019	0.467	0.226	1.034	0.684	0.706	1.726	0.226	-0.157	0.201	EMPIRICA
10	3.974	0.436	0.196	0.832	0.660	0.679	1.364	0.163	0.041	0.384	EMPIRICA
11	4.969	0.614	0.118	0.995	0.783	0.245	-0.362	0.158	-0.124	-0.399	EMPIRICA
12	3.840	0.465	0.102	0.697	0.683	0.324	0.219	0.179	-0.203	0.001	EMPIRICA
13	4.783	0.437	0.036	0.638	0.661	0.126	0.332	0.140	-0.343	0.365	EMPIRICA
14	5.828	0.299	-0.009	0.370	0.547	-0.555	1.130	-	-	-	EMPIRICA

RIO JUQUIÁ - OUT/MAR											
SÉRIE DE FREQUÊN- CIA	MOMENTOS				X			LOG(X)			DISTRIBUIÇÃO SUGERIDA
	1a.or.	2a.or.	3a.or.	4a.or.	DP	AS	CURT	DP	AS	CURT	
15	4.660	0.601	-0.310	2.469	0.775	-0.664	3.823	-	-	-	EMPIRICA
16	5.703	0.457	-0.035	0.598	0.676	-0.115	-0.140	-	-	-	EMPIRICA
17	6.794	0.265	-0.033	0.211	0.515	-0.241	0.001	-	-	-	EMPIRICA
18	5.604	0.471	-0.053	0.635	0.686	-0.164	-0.144	-	-	-	EMPIRICA
19	6.642	0.352	-0.118	0.392	0.593	-0.565	0.167	-	-	-	EMPIRICA
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	AMOST.INSUFIC.
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	AMOST.INSUFIC.
22	7.684	0.216	-0.079	0.076	0.464	-0.792	-1.137	-	-	-	EMPIRICA

TAB. 3.6.3 - PARÂMETROS DAS LINHAS PIJK

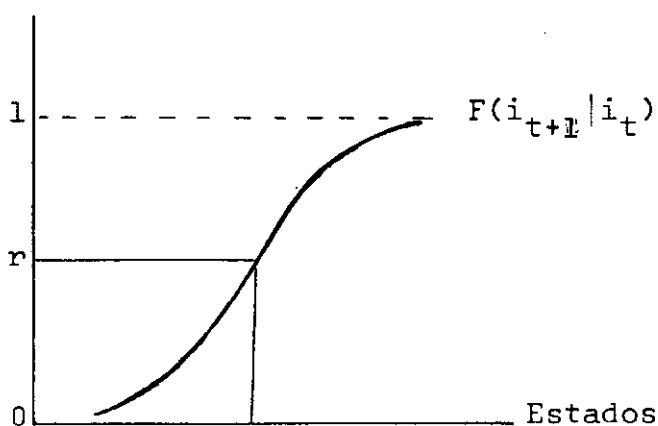
3.7 - SIMULAÇÃO ATRAVÉS DOS MODELOS DE 1a. e 2a. ORDEM

3.7.1 - Modelo de 1a. ordem (PIJ)

Construída a matriz markoviana a partir das frequências de transição de estados, utilizando-se as 23 primeiras sequências dos períodos "seco" e "molhado" do ano hidrológico, toma-se a função de probabilidade acumulada

$$F(i_{t+1}|i_t) \quad i_t, i_{t+1} \in S$$

sendo i_t o estado de partida, correspondente ao primeiro dia da 24a. sequência histórica (a ser simulada). Através da subrotina RANDU gera-se um número aleatório r no intervalo $[0,1]$ o qual, segundo o esquema seguinte, fornece o estado simulado i_{t+1} .



O processo é repetido tomando-se a

$$F(i_{t+n}|i_{t+n-1}) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (3.11)$$

3.7.2 - Modelo de 2a. ordem (PIJK)

Segundo as mesmas considerações do item anterior, toma-se a função das frequências relativas acumuladas

$$F(i_{t+1}|i_{t-1}, i_t)$$

sendo i_{t-1} e i_t os estados de partida correspondentes aos dois primeiros dias do período a simular.

Determinado o estado i_{t+1} (simulado), repete-se o esquema utilizando a função

$$F(i_{t+n}|i_{t+n-1}, i_{t+n-2}) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

No Apêndice se encontram os diagramas de blocos e listagens respectivas dos programas relativos a cada processo aqui tratado.

IV. ESTUDO COMPARATIVO DAS SÉRIES REAIS E SIMULADAS

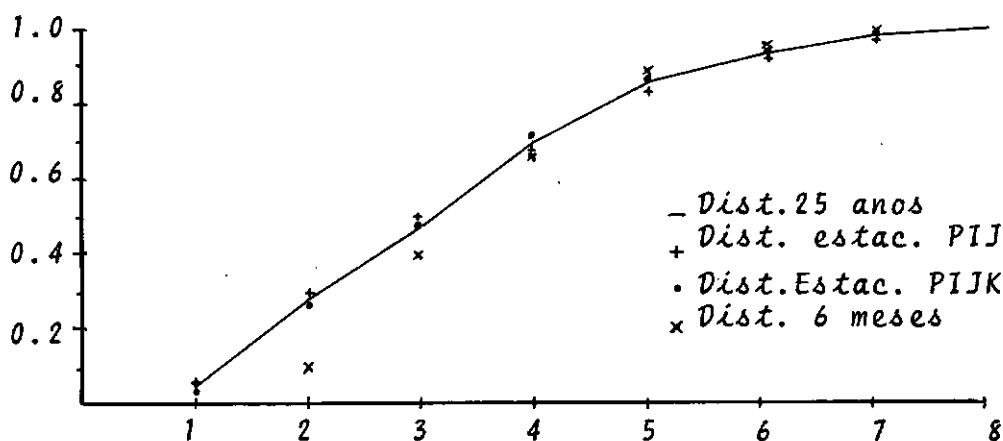
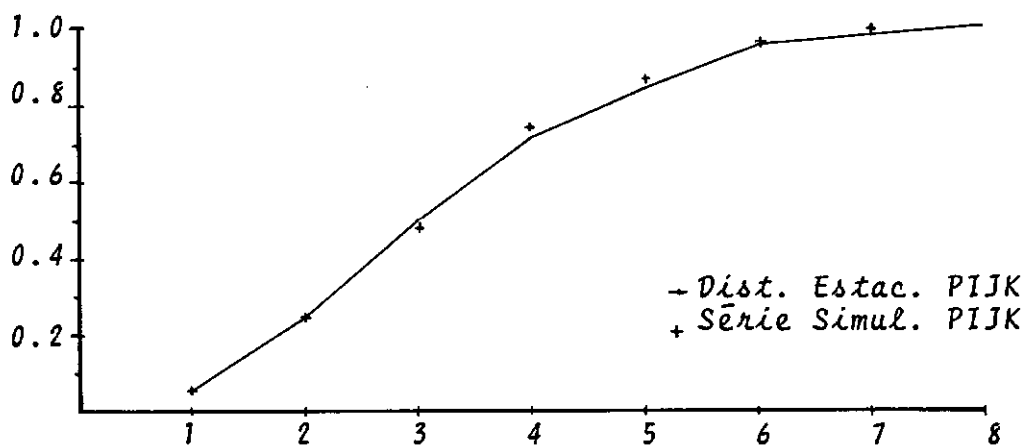
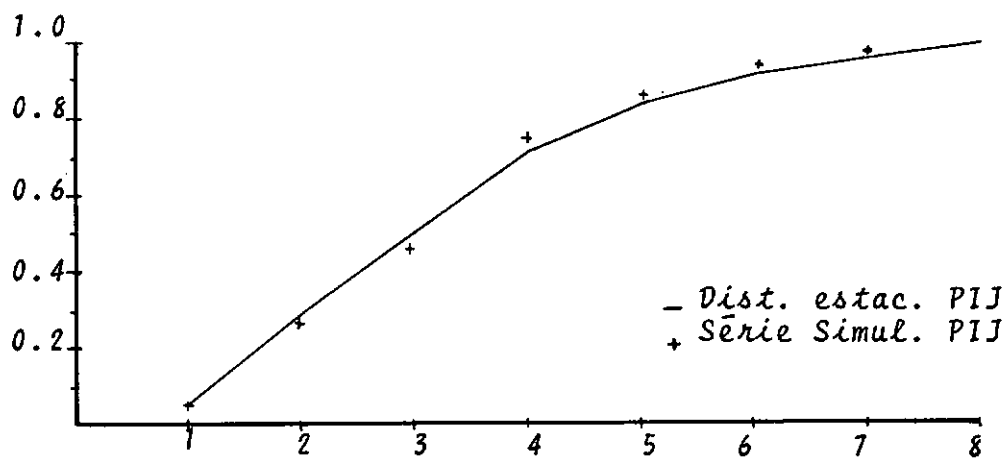
4.1 - SÉRIES REAIS E SIMULADAS

Com a finalidade de comparar os resultados obtidos através dos modelos descritos no item anterior, com as sequências reais de cada período observado, utilizou-se curvas de frequência relativa acumulada de cada série tomada.

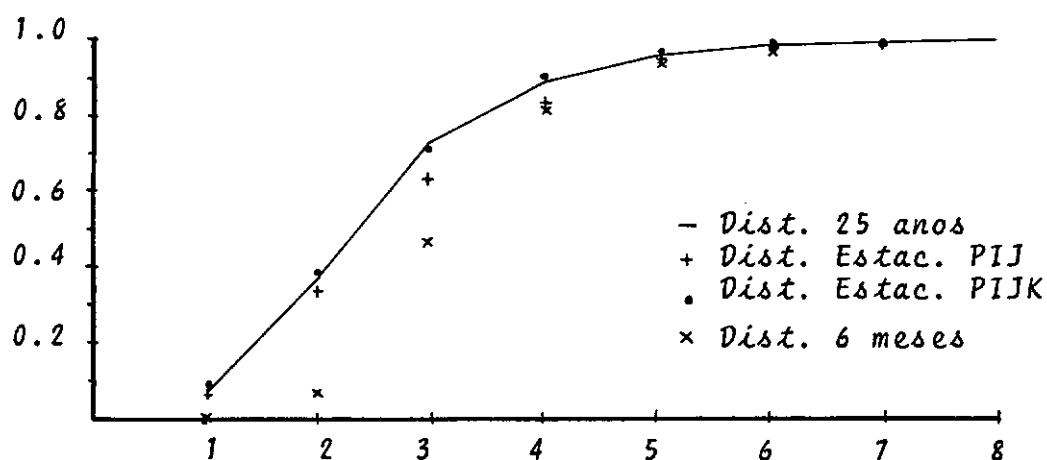
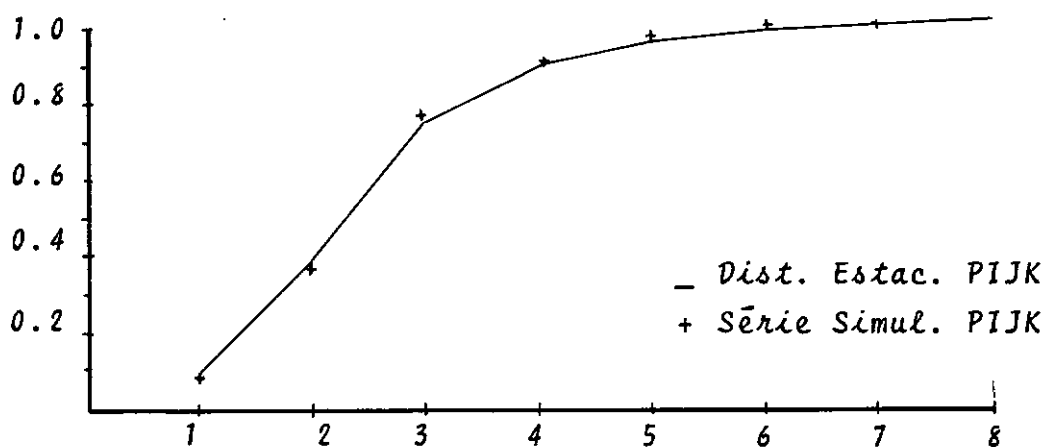
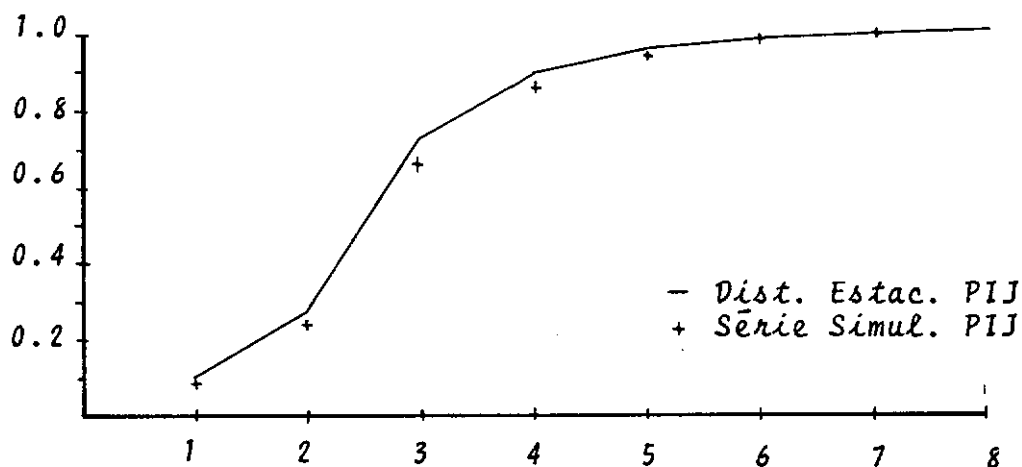
Para os dados reais, considerou-se uma curva de frequências de estados, relativa a todas as repetições do período ao longo dos 25 anos e outra relativa a última ou seja, a série $\{\xi_t\}_{23}$.

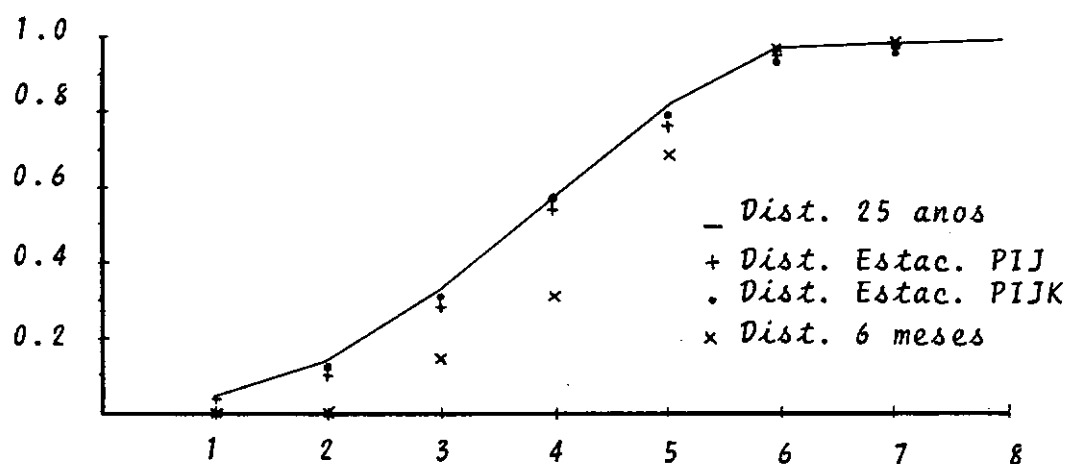
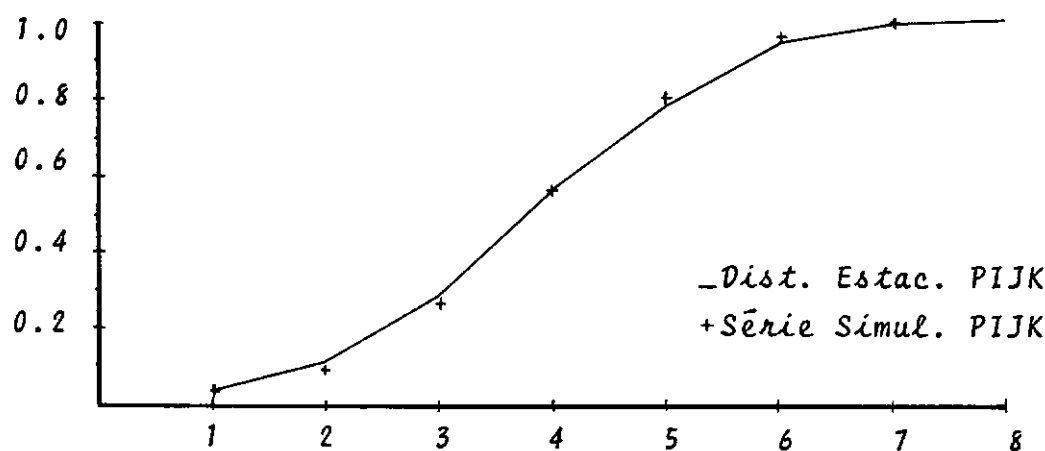
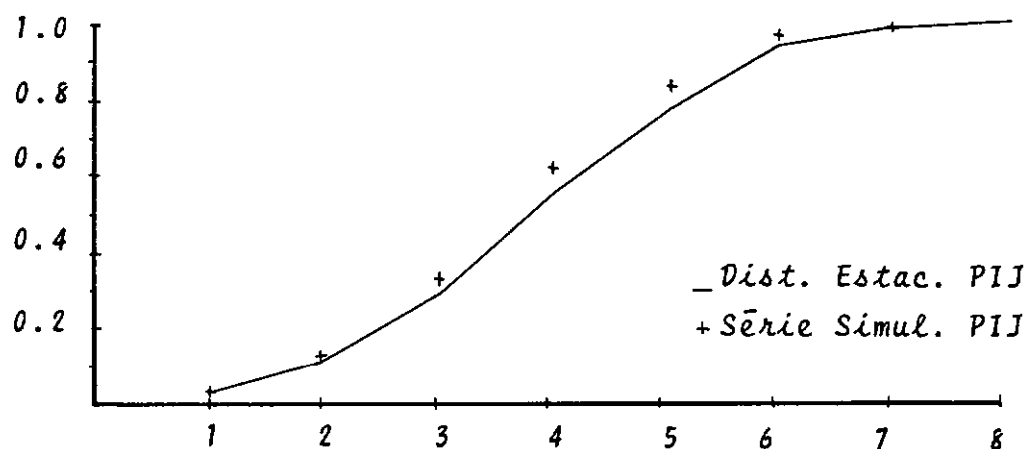
Quanto aos dados simulados, tomou-se a frequência média de 15 repetições do período simulado.

Todos esses resultados foram plotados juntamente com as curvas de distribuição estacionária, formando os diagramas D-4.2/1,2,3,4 que se seguem.



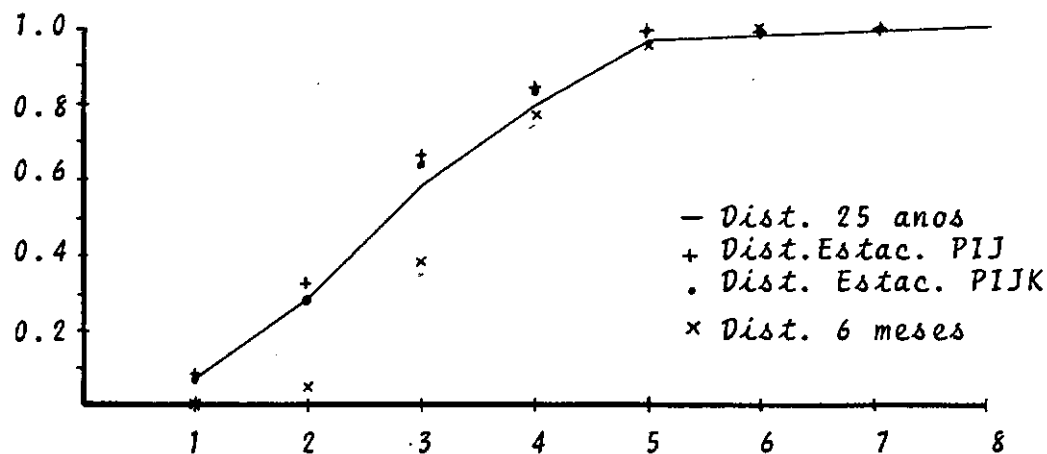
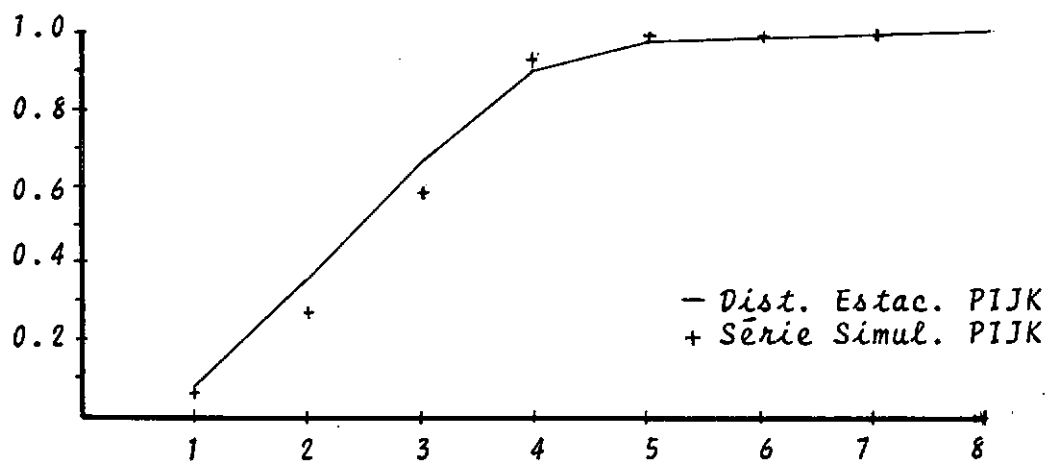
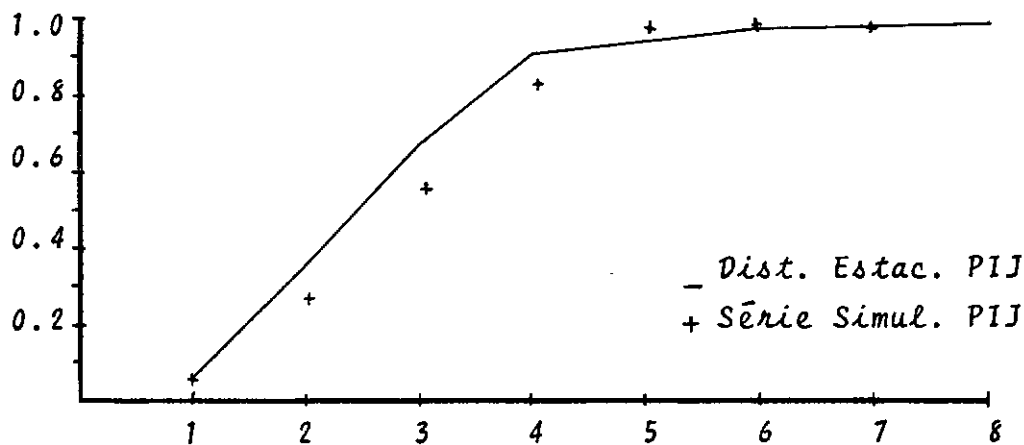
D-4.2.1 - RIO JUQUIÁ - OUT/MAR





D-4.2.3 - RIO GRANDE

- OUT/MAR



4.3 - CONCLUSÕES

A análise dos diagramas 4.2/1,2,3,4 permite as seguintes conclusões:

1. As distribuições estacionárias se aproximam bastante da distribuição de 25 anos, comprovando que as séries de vazões diárias, se comportam como processos markovianos. Vale observar que essa aproximação é muito melhor para o rio Juquiá do que para o rio Grande. Um estudo mais detalhado das razões disto foge no entanto, as finalidades deste trabalho.

2. Em ambos os processos, a frequência relativa média das séries simuladas, tende para a distribuição estacionária admitindo-se então que as 15 simulações tomadas são suficientes para alcançar um bom ajustamento. Nota-se também que o desvio é mais acentuado para o rio Grande. Isto se liga a lentidão da convergência para a distribuição estacionária (aproximadamente o dobro das iterações requeridas para o rio Juquiá no pior caso), e deve ser levado em consideração em qualquer simulação para fins de planejamento.

3. O processo de 2a. ordem dá melhor ajustamento em relação aos dados reais para todos os períodos observados ou seja, as vazões dos rios aqui estudados, comportam-se melhor co

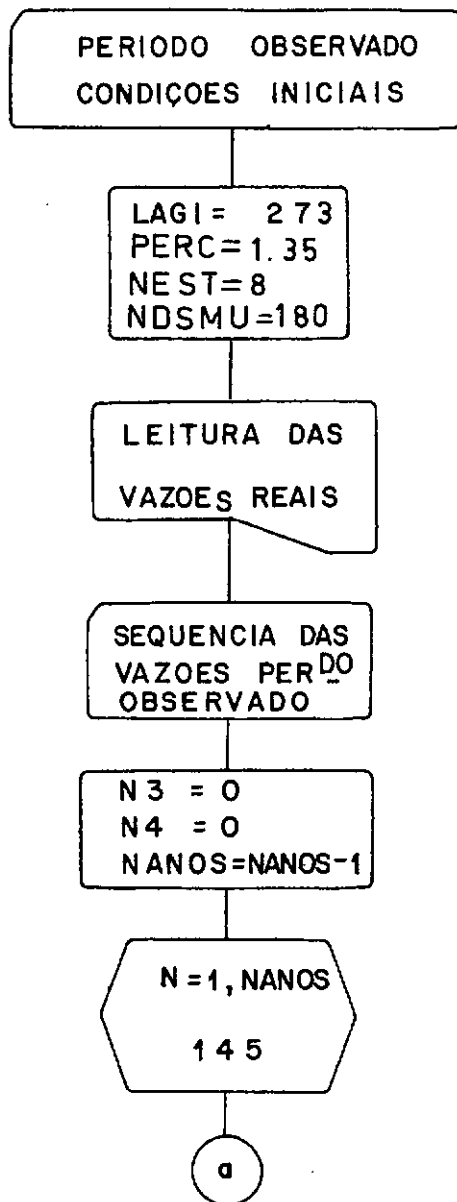
mo processo desta ordem.

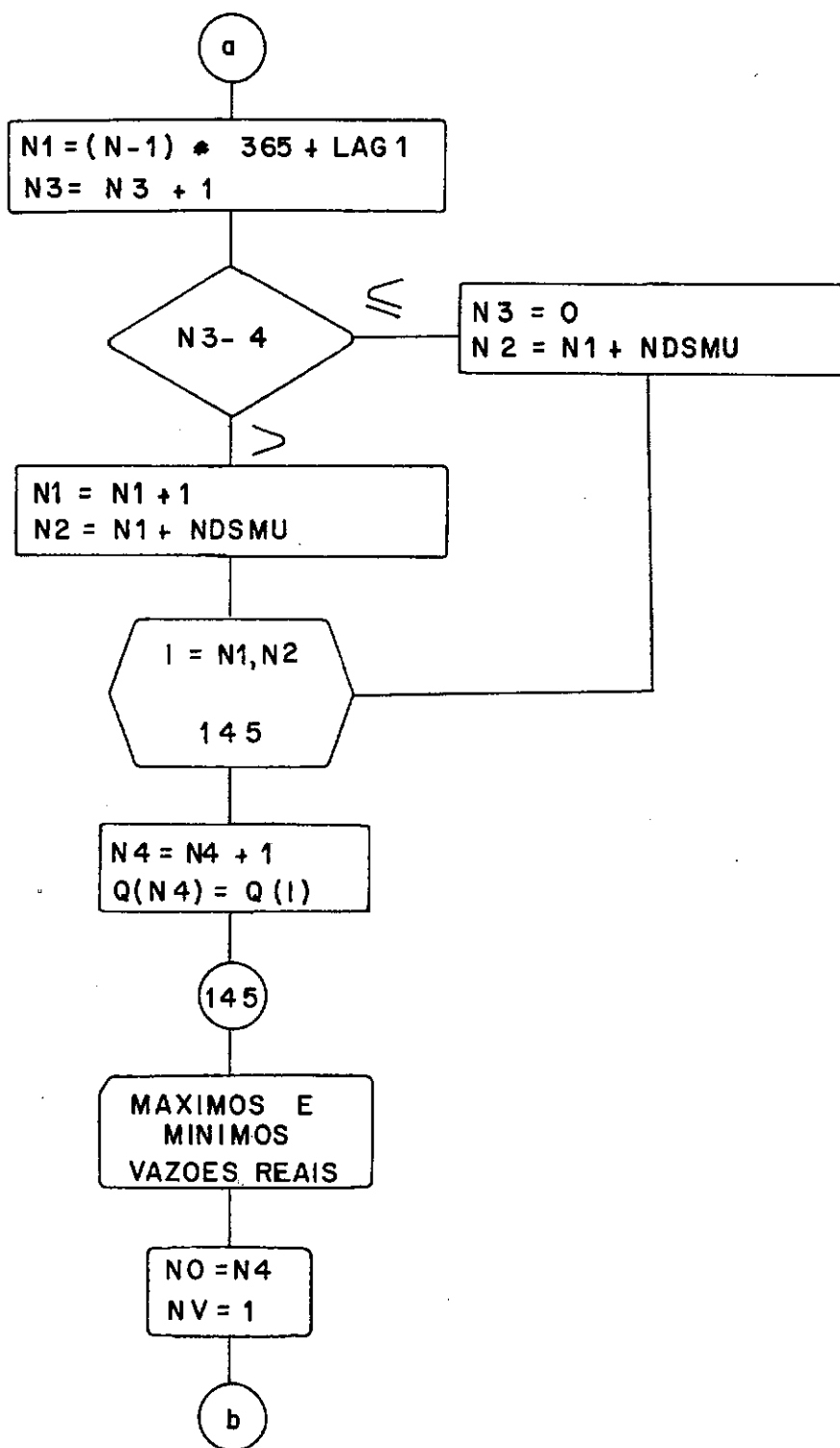
4.4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

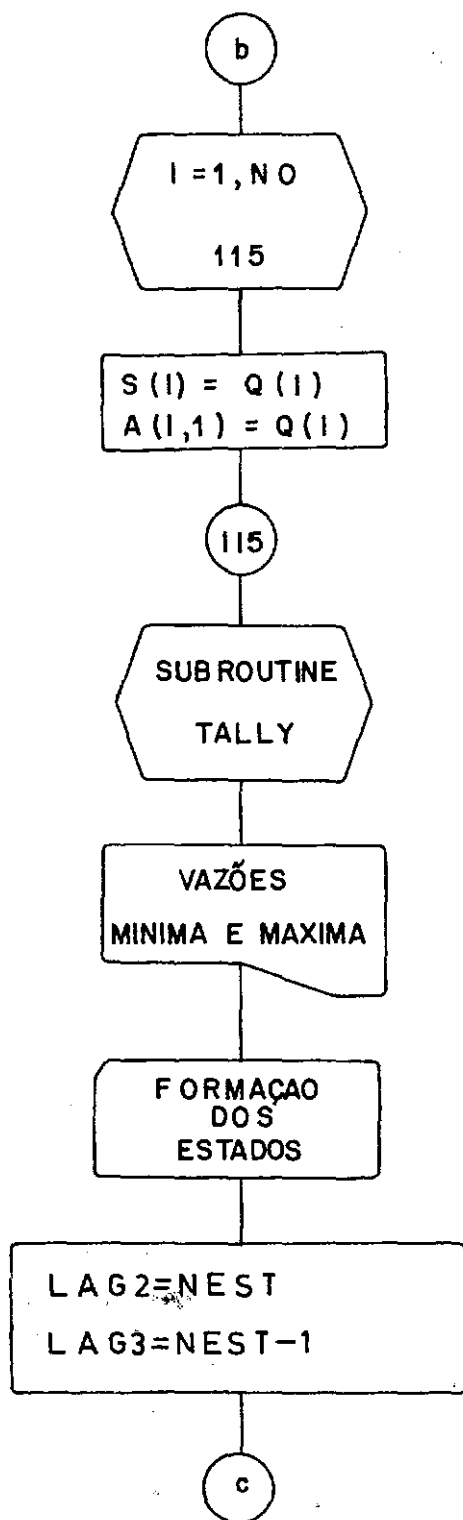
Esse estudo permite simular vazões diárias de período dos variados, sendo suficiente, para isso, alterar as condições iniciais, relativas ao período observado (ver Apêndice).

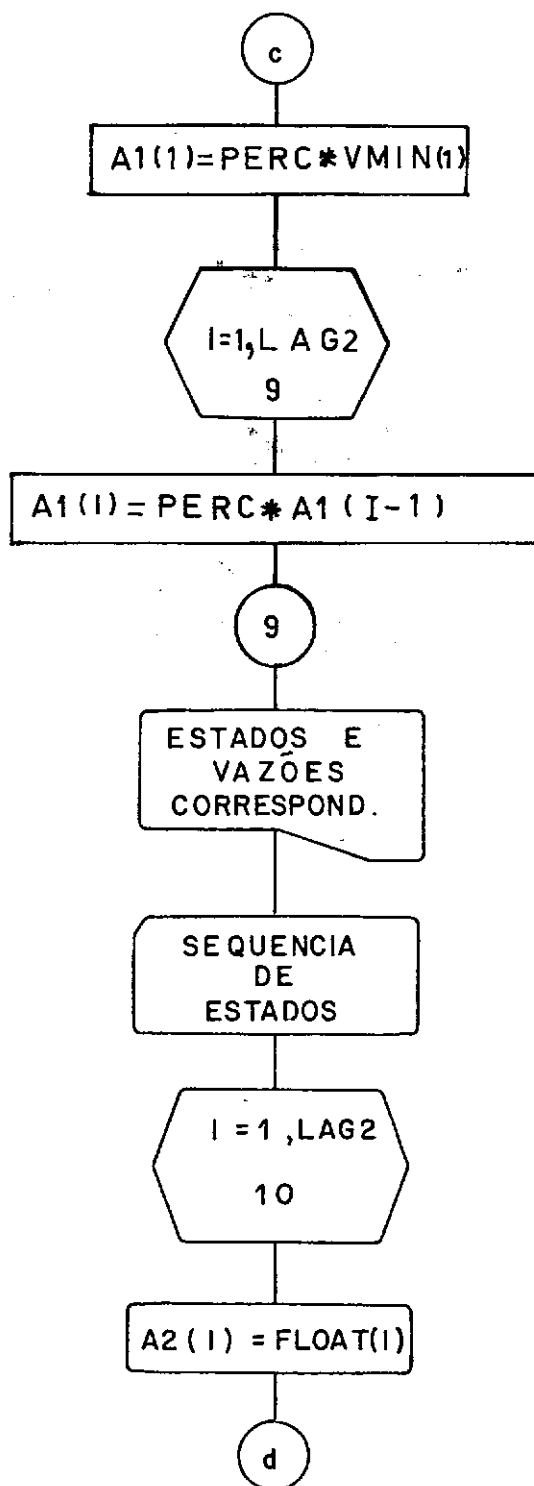
Seu emprego segundo [2] é conveniente a modelos para operação de reservatórios podendo ser útil também a complementação de séries históricas.

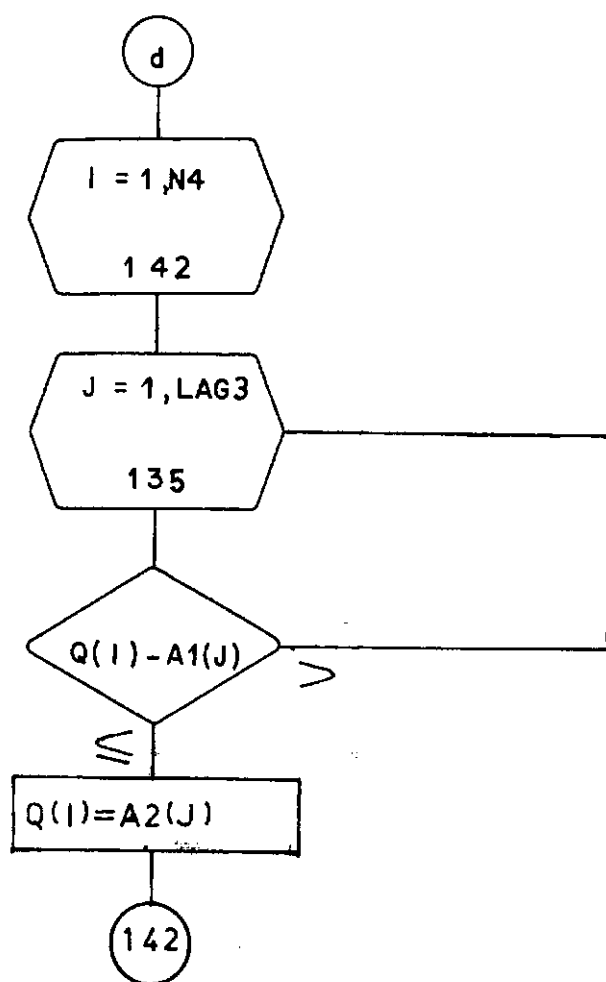
A fim de facilitar a compreensão dos programas utilizados, àqueles que desejarem utilizar esse estudo, apresentamos os Apêndices A e B contendo respectivamente os diagramas de blocos e listagens correspondentes.

FORMAÇÃO DE ESTADOS

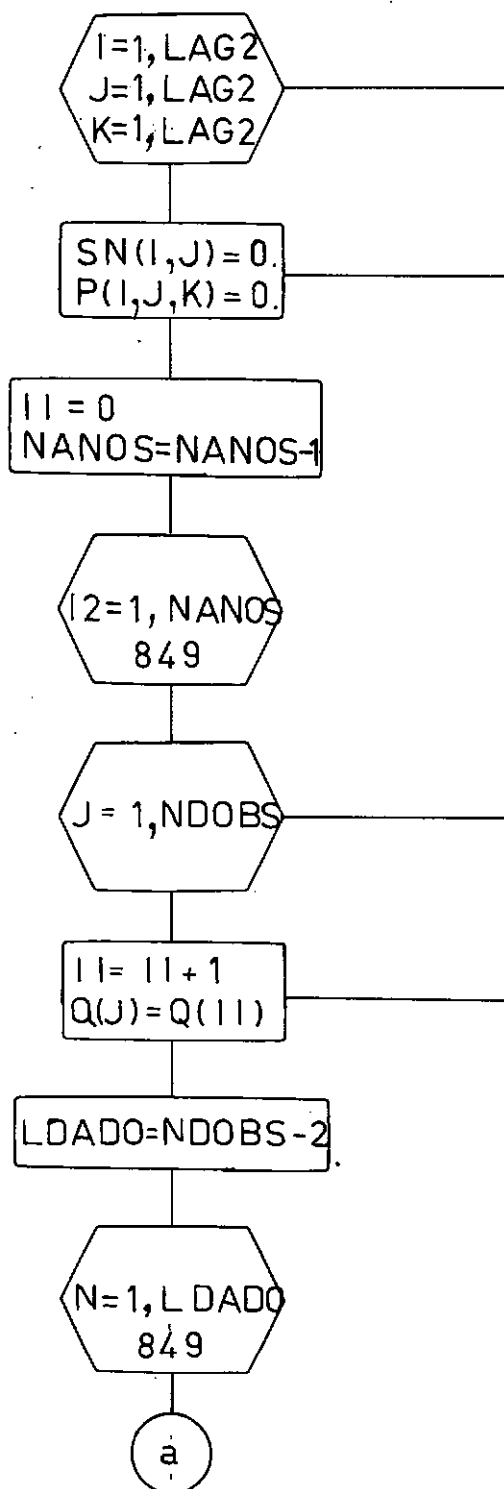


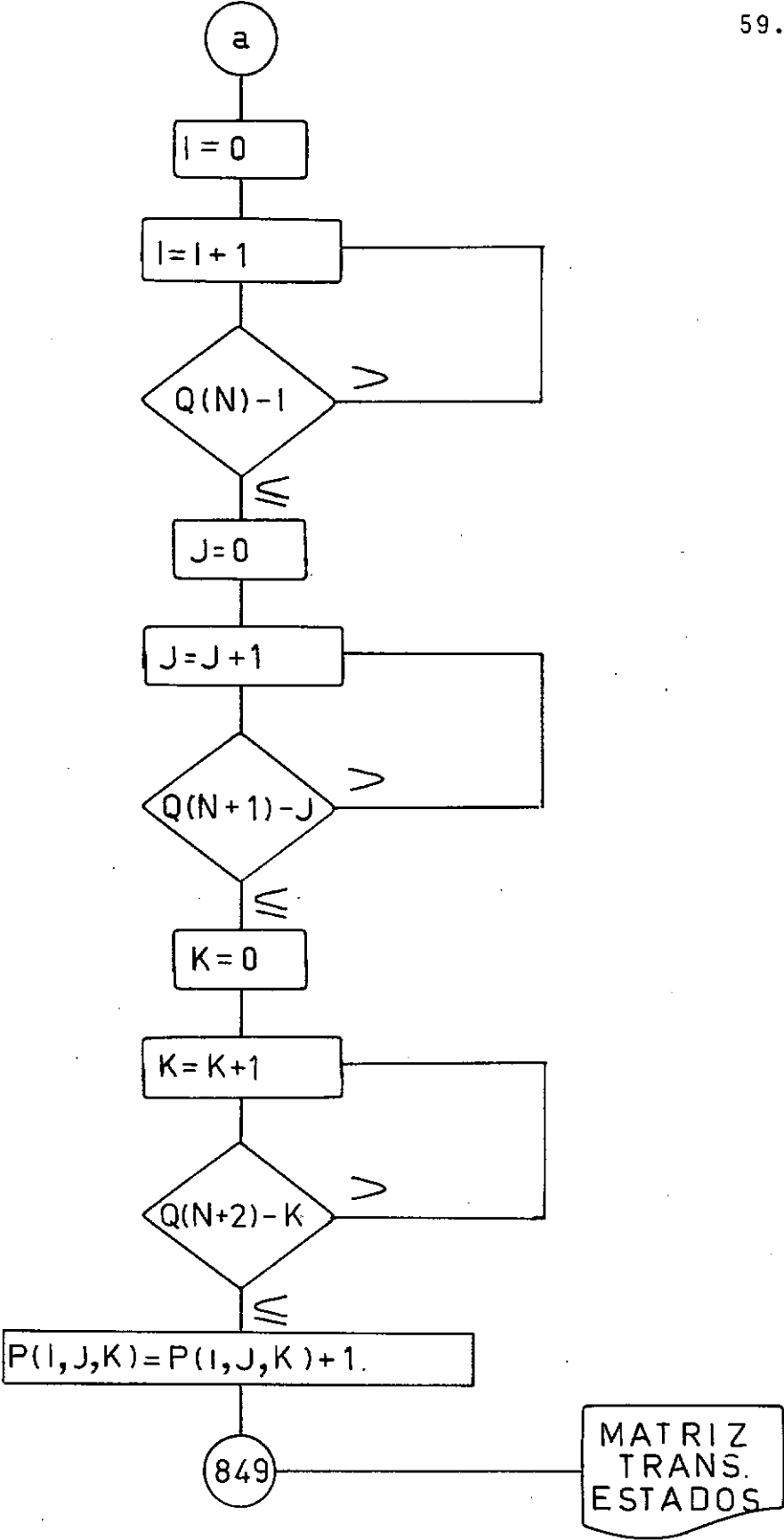




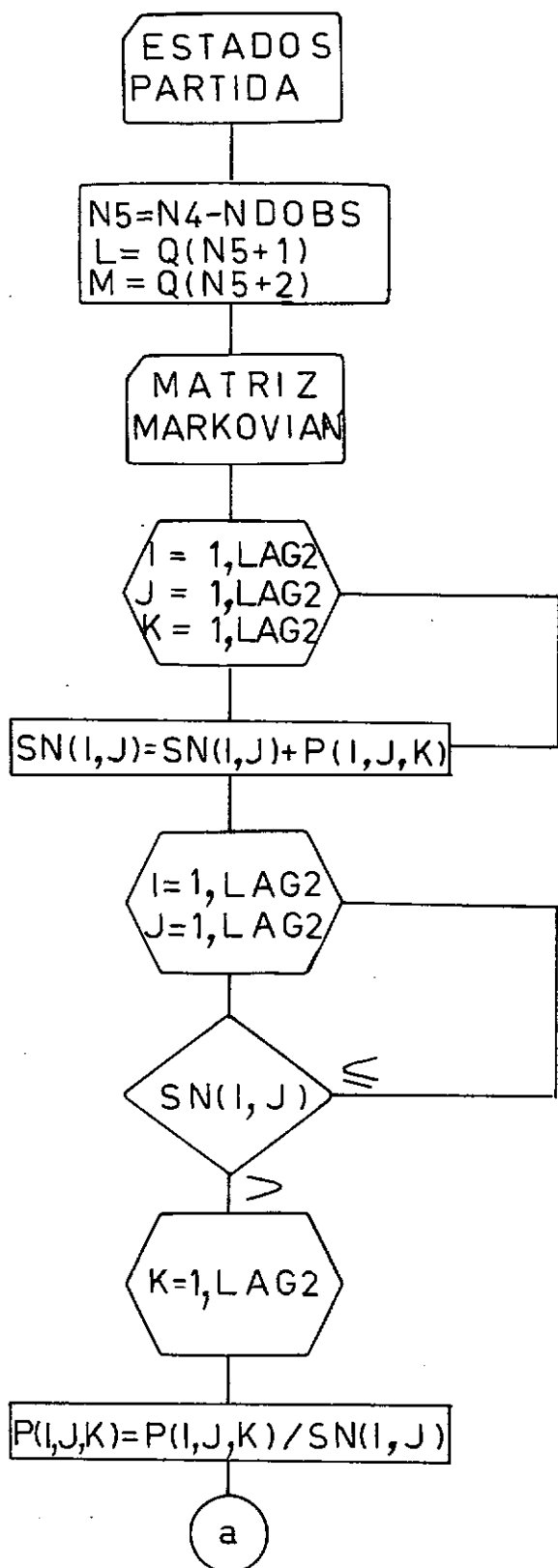


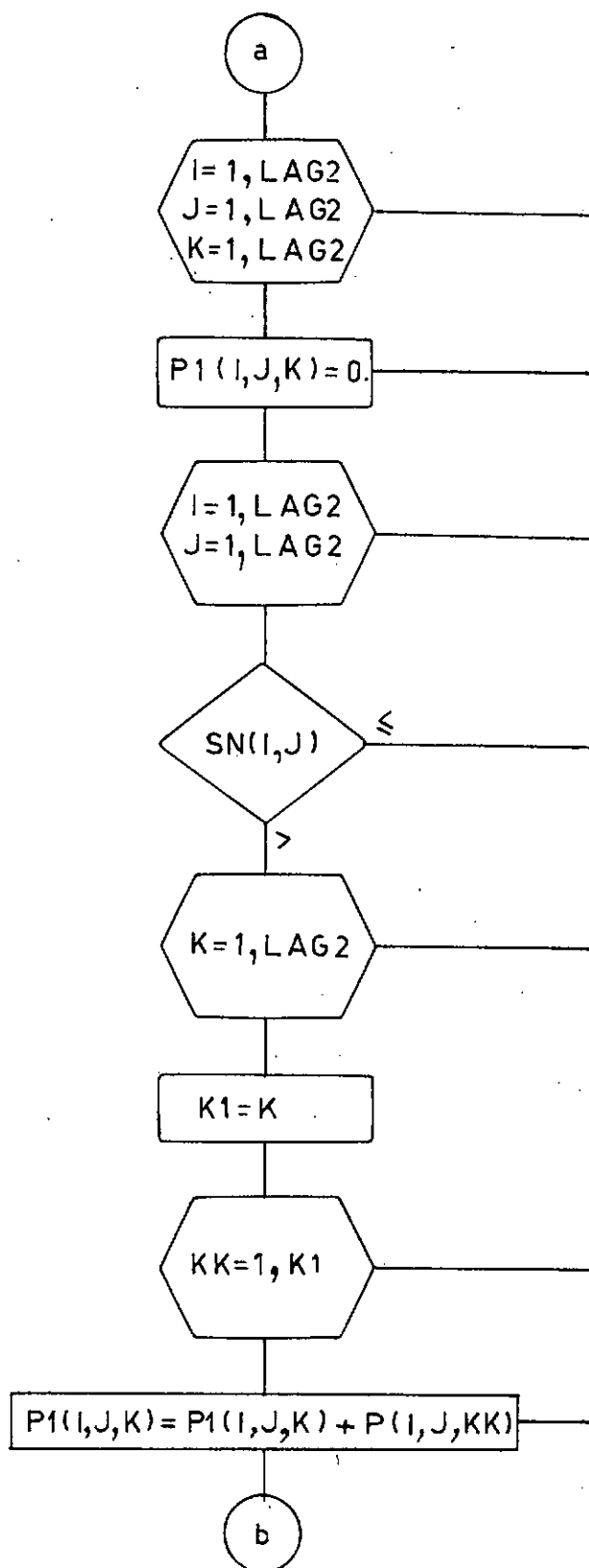
TRANSIÇÃO DE ESTADOS PIJK

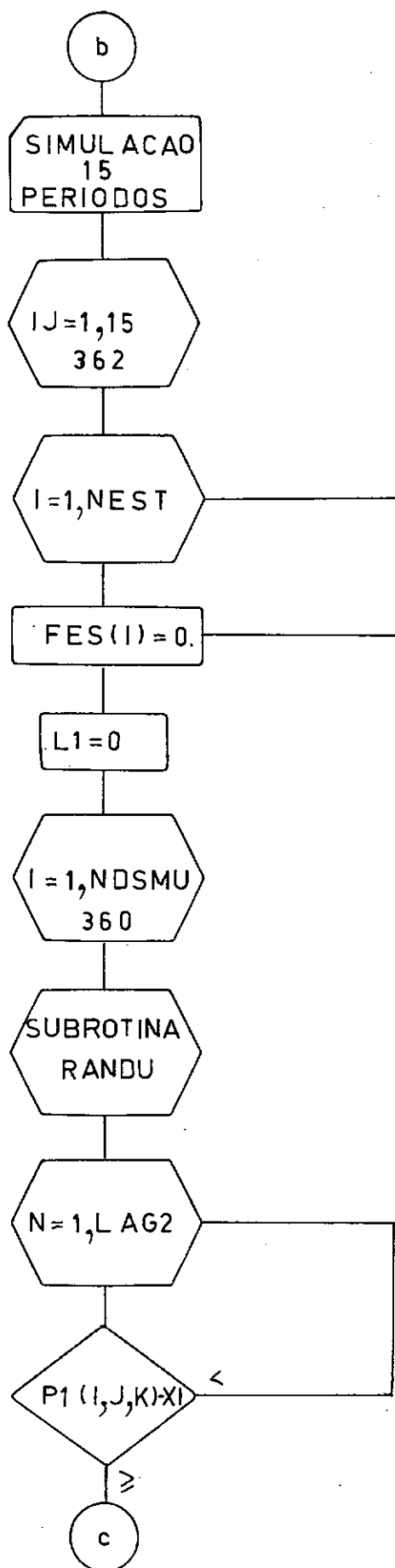


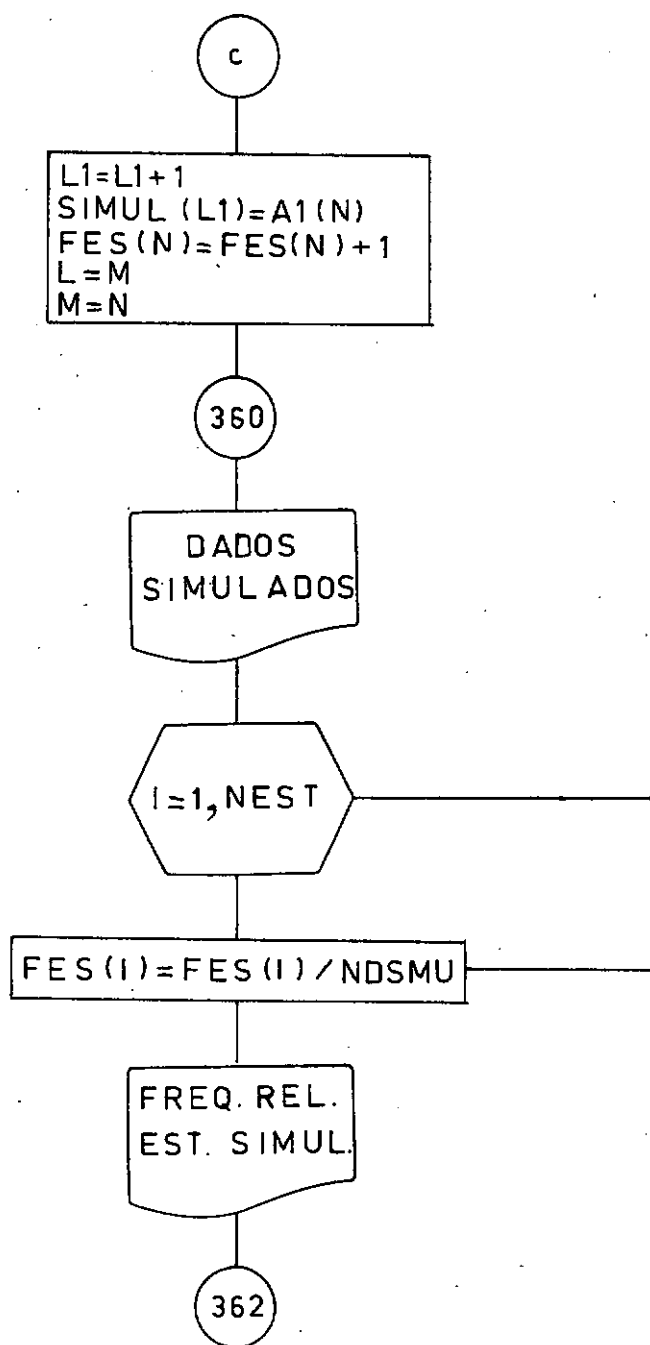


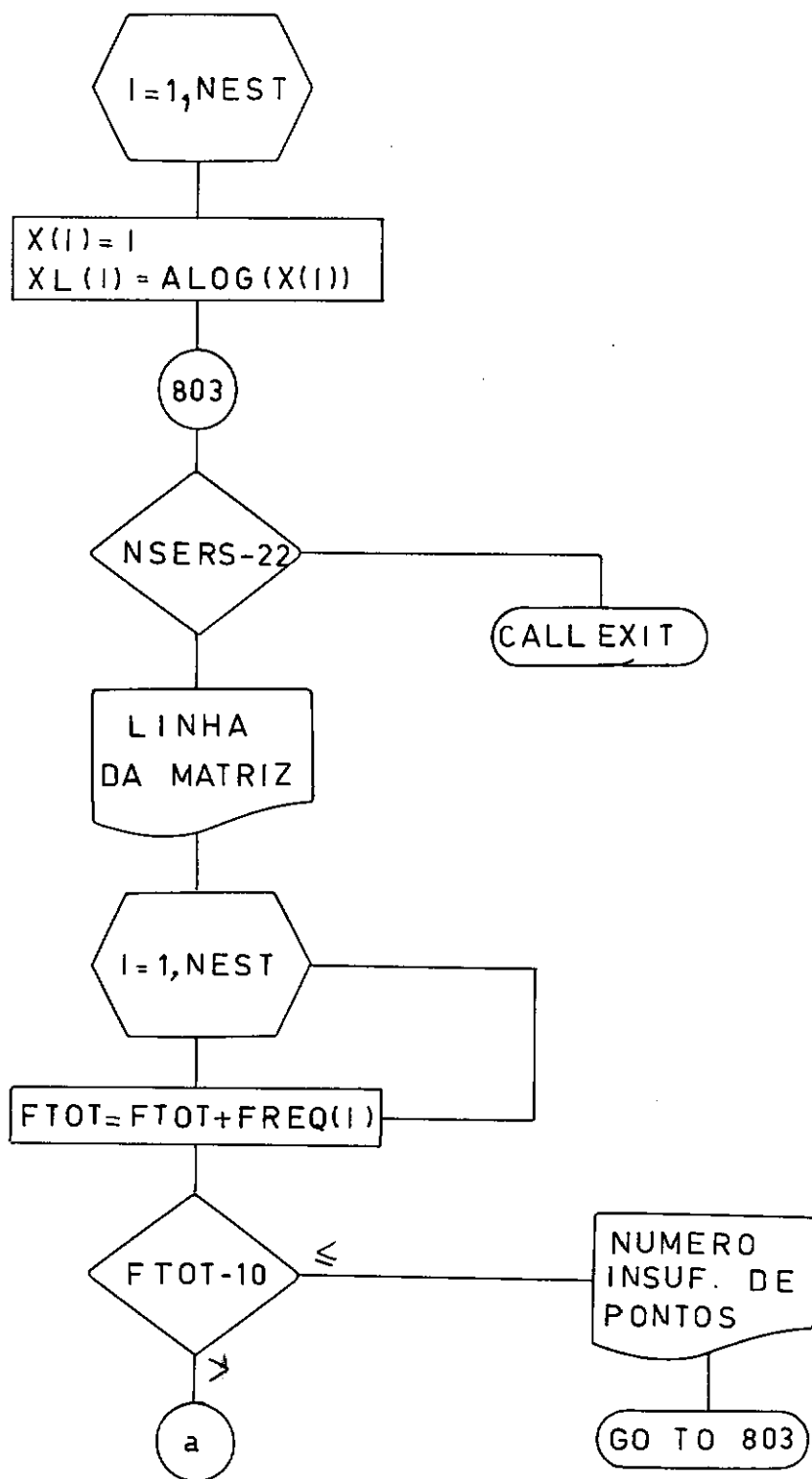
SIMULAÇÃO PIJK

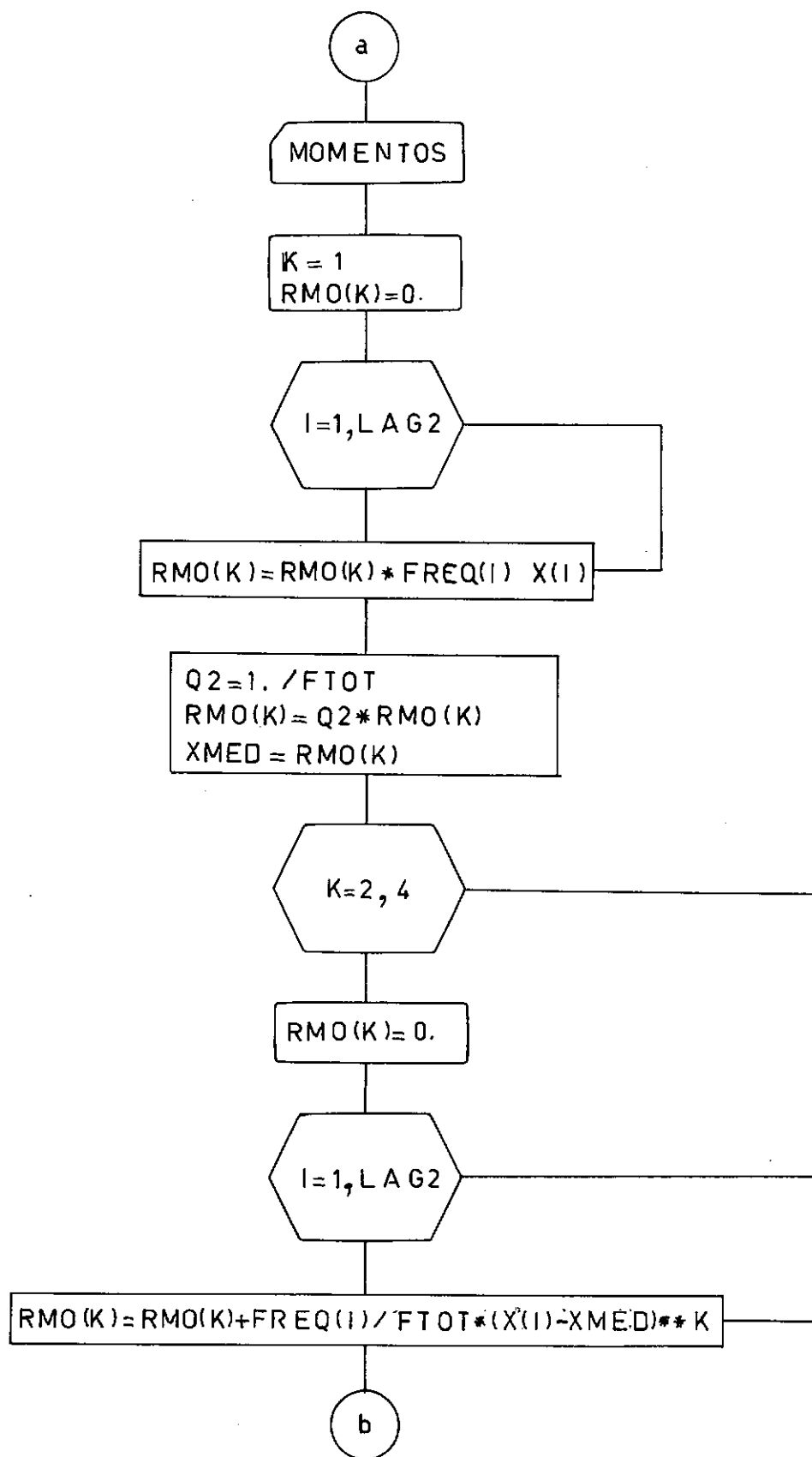


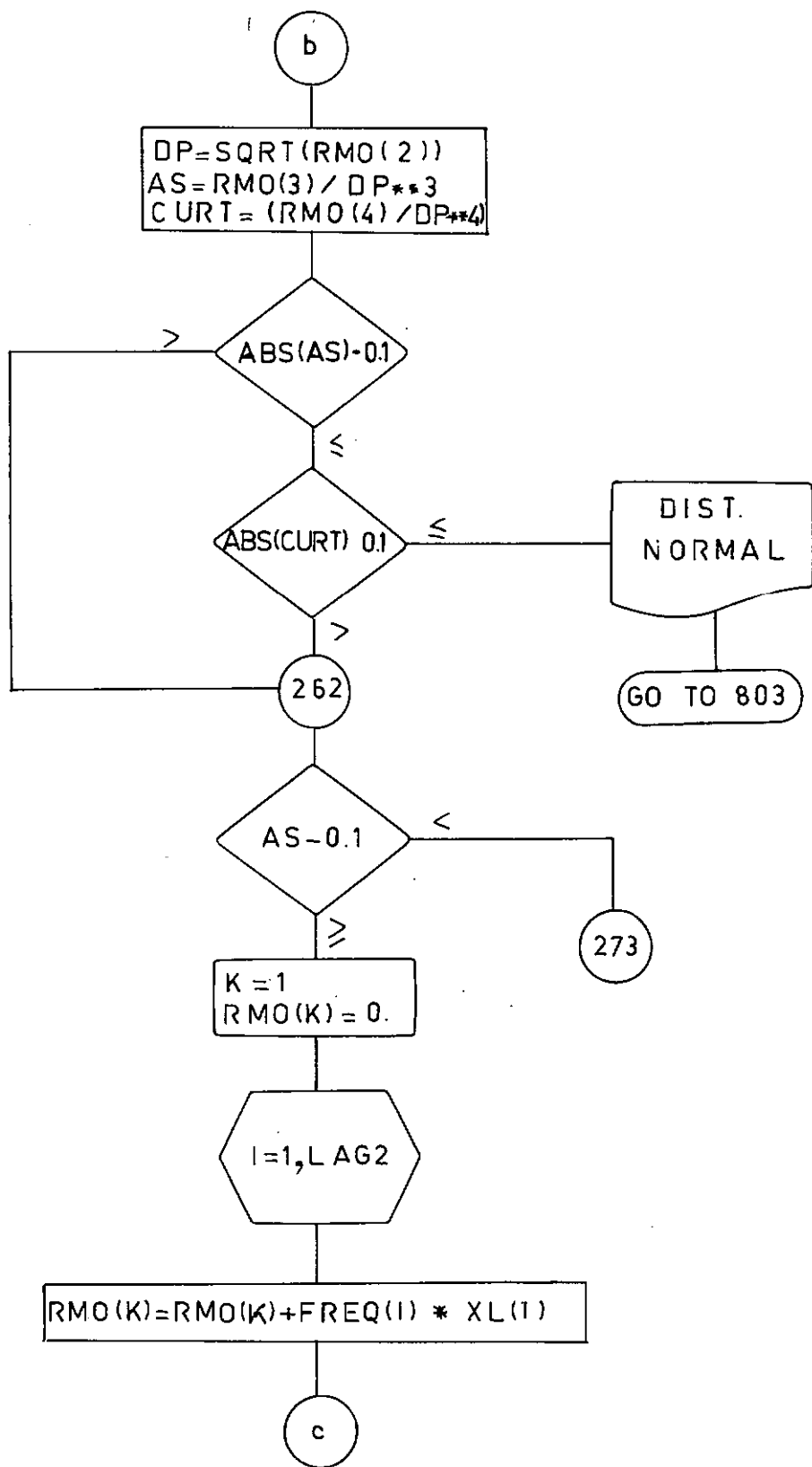


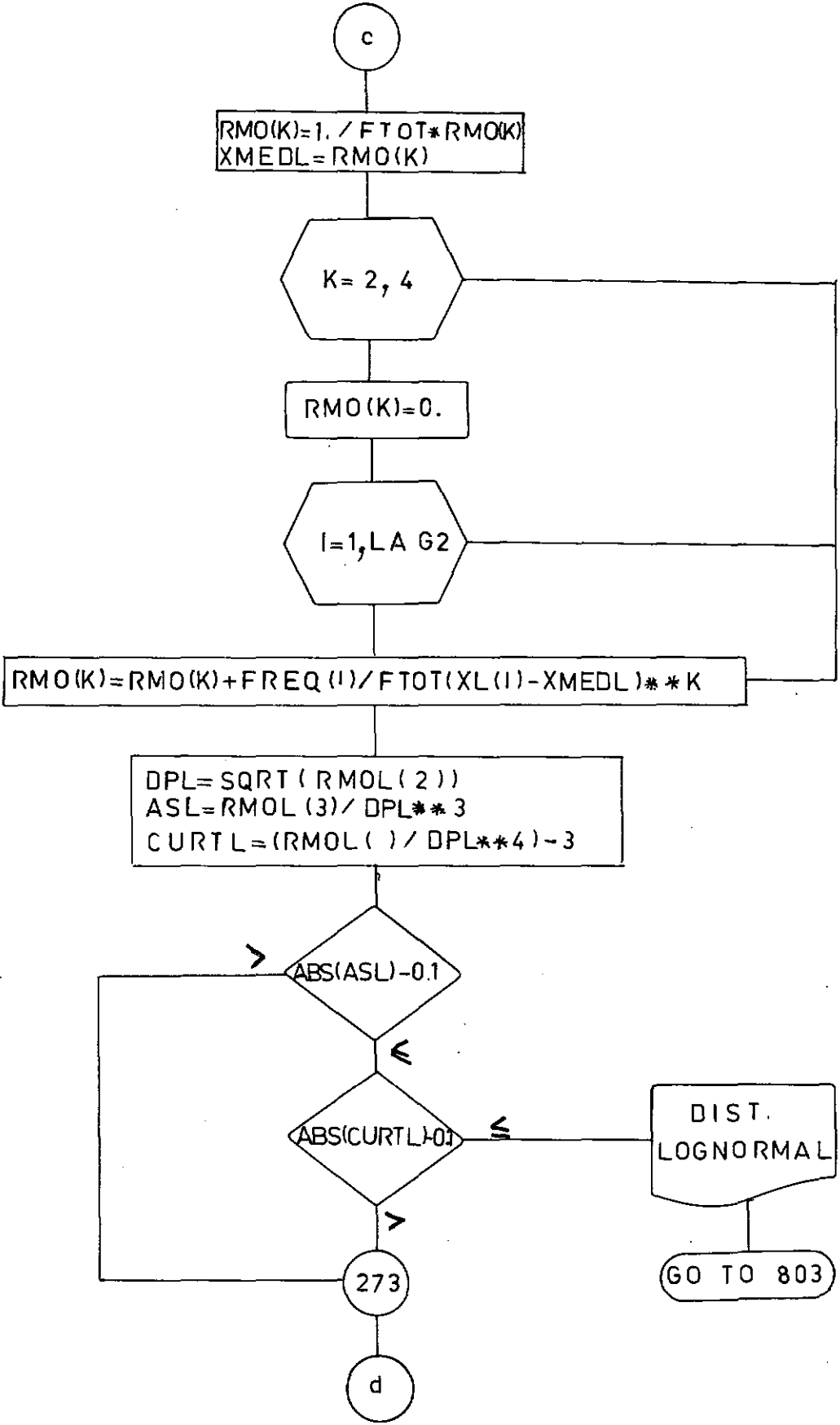


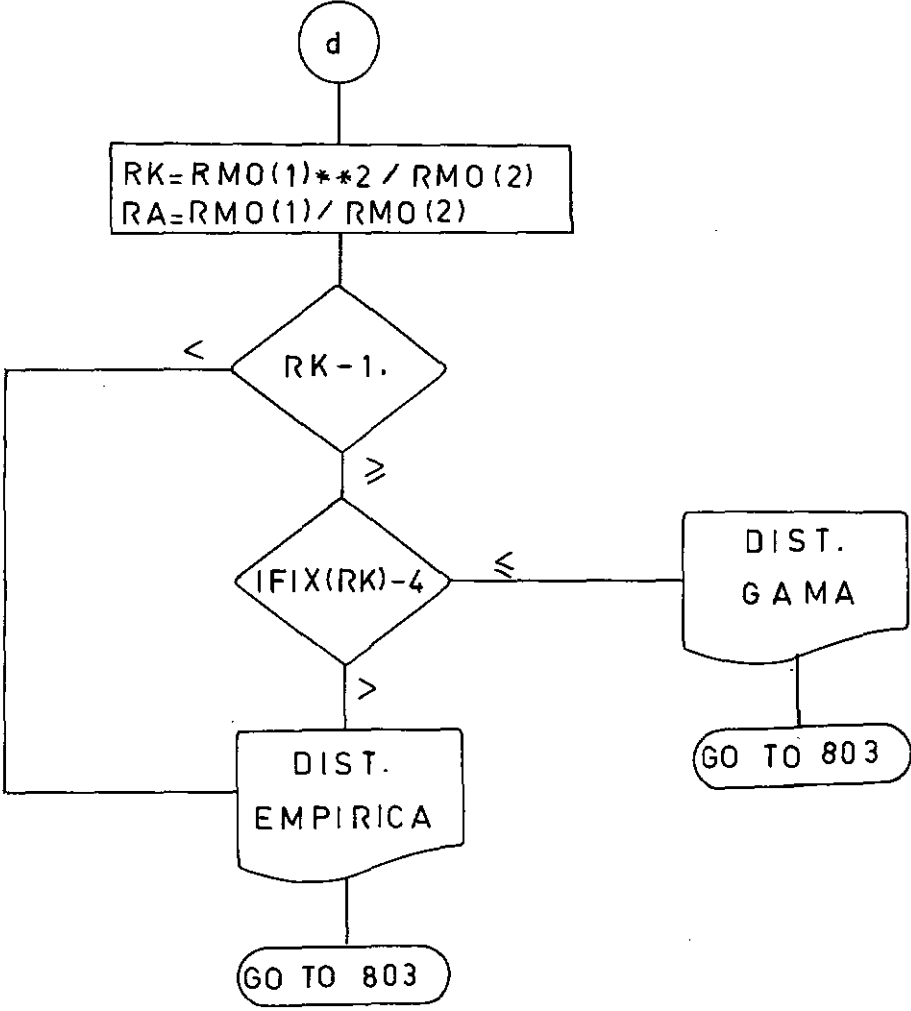


TESTES DE DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS









```

C      PRCESSO DE SEGUNDA ORDEM
C      FORMACAC DA SERIE DE ESTADOS
C
C      DIMENSION G(9140),A1(10),A2(10),P(10,10,10)
C      DIMENSION SN(10,10),P1(10,10,10),SIMUL(185),FES(10)
C      DIMENSION A(4600,1),S(4600),TOTAL(1),AVER(1),SD(1),VMIN(1)
C      DIMENSION VMAX(1)
C
C      RIO GRANDE
C      PERIODO OBSERVADO - ABR/SET
C
C      CONDICAOES INICIAIS
C      PERC=1.35
C      LAG1=90
C      NEST=8
C      NDCBS=182
C      NDSMU=180
C      NANOS=25
C      NABIS=6
C
C      LEITURA DAS VAZoes REAIS
C
C      ADADO=NANOS*365+NABIS
C      NMES=12*NANOS
C      I=0
C      NA=1
C      DO 100 N=1,NMES
C      NA=NA+I
C      NB=NA+15
C      NC=NA+16
C      ND=NA+30
100    READ(8,105)(Q(J),J=NA,NB),I,(Q(J),J=NC,ND)
105    FORMAT(16X,16F4.0,/,12X,I2,2X,16F4.0)
C
C      SERIE DOS PERIODOOS OBSERVADOS
C
C      N3=0
C      N4=0
C      NANOS=NANOS-1
C      DO 145 N=1,NANOS
C      N1=(N-1)*365+LAG1
C      N3=N3+1
C      IF(N3-4)132,132,131

```

```

131  N3=0
      N2=N1+NDOBS
      GO TO 133
132  N1=N1+1
      N2=N1+NDOBS
133  N1=N1+1
      DO 145 I=N1,N2
      N4=N4+1
      Q(N4)=Q(I)
145  CONTINUE
C
C      DETERMINACAO DO MINIMO E MAXIMO DAS VAZUES
C      REAIS DO PERIODO OBSERVADO.
C
      NO=N4
      NV=1
      DO 115 I=1,NO
      S(I)=Q(I)
115  A(I,1)=Q(I)
      CALL GALLY(A,S,TOTAL,AVER,SD,VMIN,VMAX,NO,NV)
      WRITE(5,120) VMIN(1),VMAX(1)
120  FORMAT(20X,'VAZUES EXTREMAS DO PERIODO OBSERVADO',//,20X,
* 'VMIN=',F6.0,10X,'VMAX=',F6.0)
C
C      FORMACAO DOS ESTADOS DO PERIODO OBSERVADO
C
      LAG2=NEST
      LAG3=NEST-1
      A1(1)=PERC*VMIN(1)
      DO 9 I=2,LAG2
9      A1(I)=PERC*A1(I-1)
      WRITE(5,111)(I,A1(I),I=1,LAG2)
111  FORMAT(///,10X,'ESTADOS',5X,'VAZUES CORRESPONDENTES',//,
* (13X,I2,13X,F6.0,/) )
C
C      PASSAGEM DA SERIE DE VAZUES PARA A DE ESTADOS
C
      DO 130 I=1,LAG2
130  A2(I)=FLOAT(I)
      DO 142 I=1,N4
      DO 135 J=1,LAG3
      IF(Q(I)-A1(J))140,140,135
135  CONTINUE
140  Q(I)=A2(J)
142  CONTINUE

```

```

C      ALGORITMO DAS FREQUENCIAS DE ESTADOS - PIJK
C
C      ESTADOS DE PARTIDA
      N5=N4-NDOBS
      L=Q(N5+1)
      M=Q(N5+2)
      WRITE(5,106)L,M
106    FORMAT(/,20X,'ESTADO L=',I5,5X,'ESTADO M=',I5)
      DO 150 I=1,LAG2
      DO 150 J=1,LAG2
      SN(I,J)=0.
      DO 150 K=1,LAG2
150    P(I,J,K)=0.
      II=0
      NANOS=NANOS-1
      DO 849 I2=1,NANOS
      DO 848 J=1,NDOBS
      II=II+1
      Q(J)=Q(II)
848    CONTINUE
      LDADO=NDOBS-2
      DO 850 N=1,LDADO
      I=0
805    I=I+1
      IF(Q(N)-I)810,810,805
810    J=0
815    J=J+1
      IF(Q(N+1)-J)830,830,815
830    K=0
835    K=K+1
      IF(Q(N+2)-K)840,840,835
840    P(I,J,K)=P(I,J,K)+1
850    CONTINUE
849    CONTINUE
      WRITE(5,855)((P(I,J,K),K=1,LAG2),J=1,LAG2),I=1,LAG2)
855    FORMAT(///,20X,'FREQUENCIA DAS TRANSICOES',/,(10X,8F6.0,/))

```

```

C      SIMULACAO ATRAVES DO MODELO DE 2A. ORDEM - PIJK
C
C      CALCULO DA MATRIZ MARKOVIANA
C
      DO 215 I=1,LAG2
      DO 215 J=1,LAG2
      DO 215 K=1,LAG2
215    SN(I,J)=SN(I,J)+P(I,J,K)
      DO 260 I=1,LAG2
      DO 260 J=1,LAG2
      IF(SN(I,J))245,240,245
240    GO TO 260
245    DO 250 K=1,LAG2
250    P(I,J,K)=P(I,J,K)/SN(I,J)
260    CONTINUE
C      CADOS REAIS DO PERIODO OBSERVADO
C
      N5=N5+2
      DO 878 I=N5,N4
      DO 876 J=1,LAG2
      IF(IFIX(Q(I))-J)877,877,876
876    CONTINUE
877    Q(I)=A1(J)
878    CONTINUE
      WRITE(5,901)(I,Q(I),I=N5,N4)
901    FORMAT('1',40X,'VAZOES REAIS',///,5(5X,I4,F8.0,7X))
C
      IX=1
      DO 300 I=1,LAG2
      DO 300 J=1,LAG2
      DO 300 K=1,LAG2
300    P1(I,J,K)=0.
      DO 315 I=1,LAG2
      DO 315 J=1,LAG2
      IF(SN(I,J))315,315,310
310    DO 314 K=1,LAG2
      K1=K
      DO 314 KK=1,K1
      P1(I,J,K)=P1(I,J,K)+P(I,J,KK)
314    CONTINUE
315    CONTINUE

```



```

C      SIMULACAO DE 15 PERIODOS - PIJK
C
      DO 362 IJ=1,15
      L1=0
      DO 316 I=1,NEST
316    FES(I)=0.
      DO 360 I=1,NDSMU
      CALL RANDU(IX,IY,YFL)
      IX=IY
      XI=YFL
      DO 335 N=1,LAG2
      IF(P1(L,M,N)-XI)335,340,340
335    CCINUE
340    L1=L1+1
      SIMUL(L1)=A1(N)
      L=M
      M=N

C
C      FREQUENCIA DOS ESTADOS SIMULADOS
      FES(N)=FES(N)+1.
360    CONTINUE
C
C      SAIDA DOS DADOS SIMULADOS
C
      WRITE(5,365)(K,SIMUL(K),K=1,NDSMU)
365    FORMAT('1',40X,'VAZOES SIMULADAS',///,5(5X,I4,F8.0,7X))
      DO 361 I=1,NEST
361    FES(I)=FES(I)/FLOAT(NDSMU)
      WRITE(5,131)(K,FES(K),K=1,NEST)
131    FORMAT(///,20X,'FREQ. RELATIVA DOS ESTADOS SIMULADOS',
*///,(30X,I3,5X,F6.3))
362    CONTINUE
      CALL EXIT
      END

```

```

C      ALGORITMO DAS FREQUENCIAS DE ESTADOS - PIJ
C
C      ESTADOS DE PARTIDA
      N5=N4-NDOBS
      L=Q(N5+1)
      WRITE(5,106)L
106    FORMAT(/,20X,'ESTADO L=',I5)
      DO 30 I=1,LAG2
      SN(I)=0.
      DO 30 J=1,LAG2
30     P(I,J)=0.
      II=0
      NANC5=NANOS-1
      DO 849 I2=1,NANC5
      DO 848 J=1,NDOBS
      II=II+1
      Q(J)=Q(II)
848    CONTINUE
      LDACC=NDOBS-1
      DO 850 N=1,LDACC
      I=0
805    I=I+1
      IF(Q(N)-I)810,810,805
810    J=0
815    J=J+1
      IF(Q(N+1)-J)830,830,815
830    P(I,J)=P(I,J)+1
850    CCNTINUE
849    CONTINUE
      WRITE(5,855)((P(I,J),J=1,LAG2),I=1,LAG2)
855    FORMAT(///,20X,'FREQUENCIA DAS TRANSICOES',//,(10X,8F6.0,/))

```

```

C      SIMULACAO ATRAVES DO MODELO DE 1A. ORDEM - PIJ
C
C      CALCULO DA MATRIZ MARKOVIANA
C
      DO 80 I=1,LAG2
      DO 80 J=1,LAG2
80     SN(I)=SN(I)+P(I,J)
      DO 85 I=1,LAG2
      IF(SN(I))85,85,83
83     DO 85 J=1,LAG2
      P(I,J)=P(I,J)/SN(I)
85     CONTINUE
C
C      DADOS REAIS DO PERIODO SIMULADO
C
      N5=N5+2
      DO 878 I=N5,N4
      DO 876 J=1,LAG2
      IF(IFIX(Q(I))-J)877,877,876
876     CONTINUE
877     Q(I)=A1(J)
878     CONTINUE
      WRITE(5,901)(I,Q(I),I=N5,N4)
901     FORMAT('1',40X,'VAZÕES REAIS',///,5(5X,I4,F8.0,7X))
      IX=1
      DO 6 I=1,LAG2
      DO 6 J=1,LAG2
6       P1(I,J)=0.
      DO 12 I=1,LAG2
      IF(SN(I))12,12,7
7       DO 12 J=1,LAG2
      J1=J
      DO 11 KK=1,J1
11      P1(I,J)=P1(I,J)+P(I,KK)
12     CONTINUE

```

```

C      SIMULACAO DE 15 PERIODOS - PIJ
C
      DO 28 IJ=1,15
      DO 13 I=1,NEST
13      FES(I)=0.
          LI=0
          DO 26 I=1,NDSMU
          CALL RANDU(IX,IY,YFL)
          IX=IY
          XI=YFL
          DO 17 J=1,LAG2
          IF(P1(L,J)-XI)17,21,21
17      CONTINUE
21      LI=LI+1
          SIMUL(LI)=A1(J)
          L=L+1
C
C      FREQUENCIA DOS ESTADOS SIMULADOS
      FES(J)=FES(J)+1.
26      CONTINUE
C
C      SAIDA DOS CADOS SIMULADOS
C
      WRITE(5,365)(K,SIMUL(K),K=1,NDSMU)
365      FORMAT('1',40X,'VAZÕES SIMULADAS',///,5(5X,I4,F8.0,7X))
      DO 27 I=1,NEST
27      FES(I)=FES(I)/FLOAT(NDSMU)
          WRITE(5,131)(K,FES(K),K=1,NEST)
131      FORMAT(///,20X,'FREQ. RELATIVA DOS ESTADOS SIMULADOS',
          *///,(30X,I3,5X,F6.3))
28      CONTINUE
          CALL EXIT
          END

```

```

C      TESTES ESTATISTICOS DAS DISTRIBUICOES TEORICAS
C
      FTOT=0.
      DO 234 I=1,LAG2
234      FTOT=FTOT+FREQ(I)
      IF(FTOT-10.)236,236,238
236      WRITE(5,237)
237      FORMAT(/,20X,'NUMERO INSUFICIENTE DE PONTOS')
      GO TO 803

C
C      CALCULO DOS MOMENTOS DA LINHA PIJK(N)
C
C      PRIMEIRO MOMENTO
238      K=1
      RMO(K)=0.
      DO 240 I=1,LAG2
240      RMO(K)=RMO(K)+FREQ(I)*X(I)
      Q2=1./FTOT
      RMC(K)=Q2*RMO(K)
      XMED=RMO(K)

C      SEG., TER., E QUARTO MOMENTOS
      DO 245 K=2,4
      RMO(K)=0.
      DO 245 I=1,LAG2
      RMC(K)=RMO(K)+FREQ(I)/FTOT*(X(I)-XMED)**K
245      CONTINUE
      WRITE(5,256)(I,RMO(I),I=1,4)
256      FORMAT(/,30X,'MOMENTOS',/(20X,I4,5X,E14.7,/))

C
C      CALCULO DOS COEF. DE ASSIMETRIA E CURTOSE
C
      DP=SQRT(RMO(2))
      IF(ABS(DP)-0.01)257,257,259
257      GO TO 410
259      AS=RMC(3)/DP**3
      CURT=(RMO(4)/DP**4)-3
      WRITE(5,260)DP,AS,CURT
260      FORMAT(/,10X,'DESVPAD=',E14.7,5X,'COEF.ASSIM=',E14.7,5X,
      *'COEF.CURT=',E14.7)

```

```

C      TESTE DO TIPO DE DISTRIBUICAO
C
C      PRIMEIRO TESTE - DISTRIBUICAO NORMAL
      IF (ABS(AS)-0.1)261,261,262
261    IF (ABS(CURT)-0.1)280,280,262
C      SEGUNDO TESTE - DISTRIBUICAO LOGNORMAL
262    IF (AS-0.1)273,272,272
C      PRIMEIRO MOMENTO DE LOG(X)
272    K=1
      RMOL(K)=0.
      DO 710 I=1,LAG2
710    RMOL(K)=RMOL(K)+FREQ(I)*XL(I)
      RMOL(K)=1./FTOT*RMOL(K)
      XMEDL=RMOL(K)
C      SEG., TER. E QUARTO MOMENTO DE LOG(X)
      DO 715 K=2,4
      RMOL(K)=0.
      DO 715 I=1,LAG2
      RMOL(K)=RMOL(K)+FREQ(I)/FTOT*(XL(I)-XMEDL)**K
715    CONTINUE
      DPL=SQRT(RMOL(2))
      IF (ABS(DPL)-0.01)410,410,718
718    ASL=RMOL(3)/DPL**3
      CURTL=(RMOL(4)/DPL**4)-3.
      WRITE(5,720)DPL,ASL,CURTL
720    FORMAT(/,20X,'DPL=',E14.7,5X,'ASL=',E14.7,5X,'CURTL=',E14.7)
      IF (ABS(ASL)-0.1)730,730,273
730    IF (ABS(CURTL)-0.1)290,290,273
C      TERCEIRO TESTE - DISTRIBUICAO GAMA
273    RK=RMO(1)**2/RMO(2)
      RA=RMO(1)/RMO(2)
      IF (RK-1.)410,275,275
275    IF (IFIX(RK)-4)300,300,410
410    WRITE(5,415)
415    FORMAT(/,20X,'DISTRIBUICAO EMPIRICA')
      GO TO 803
280    WRITE(5,281)
281    FORMAT(/,20X,'DISTRIBUICAO NORMAL')
      GO TO 803
290    WRITE(5,291)
291    FORMAT(/,20X,'DISTRIBUICAO LOGNORMAL')
      GO TO 803
300    WRITE(5,301)
301    FORMAT(/,20X,'DISTRIBUICAO GAMA')
      GO TO 803
900    CALL EXIT
      END

```

```

C   DISTRIBUICAO ESTACIONARIA - PIJK
C
C   DIMENSION D(10,10,10),P(10,10),P1(10,10)
C   DIMENSION S(10,10),P2(10)
C
C   RIG JUQUIA - S.P.
C   PERICCC OBSERVADO - ABR/SET
C
C   NEST=8
C   M=NEST
C   MATRIZ MARKOVIANA
15  READ(8,15)((D(I,J,K),K=1,M),J=1,M),I=1,M)
C   FORMAT(8F5.0)
C   DO 20 I=1,M
C   DO 20 J=1,M
C   S(I,J)=0.
C   DO 20 K=1,M
20  S(I,J)=S(I,J)+D(I,J,K)
C
C   VETOR DISTRIBUICAO INICIAL
C
C   SOMA=0.
C   DO 24 I=1,M
C   DO 24 J=1,M
C   IF(S(I,J))23,22,23
22  P(I,J)=0.
C   GO TO 24
23  P(I,J)=1.
C   SOMA=SOMA+1.
24  CONTINUE
C   DO 25 I=1,M
C   DO 25 J=1,M
25  P(I,J)=P(I,J)/SOMA
C   DO 26 I=1,M
C   P2(I)=0.
C   DO 26 J=1,M
26  P2(I)=P2(I)+P(J,I)
C   WRITE(5,27)(P2(I),I=1,M)
27  FORMAT(////,15X,'VETOR DISTRIBUICAO INICIAL',//,5X,8F6.3)
C   DO 30 I=1,M
C   DO 30 J=1,M
C   IF(S(I,J))30,30,28
28  DO 29 K=1,M
29  D(I,J,K)=D(I,J,K)/S(I,J)
30  CONTINUE

```

```
C      CALCULO DA MATRIZ DIST. ESTACIONARIA
C
      N=1
40     DO 45 I=1,M
        DO 45 J=1,M
          P1(I,J)=0.
45     CONTINUE
        DO 50 I=1,M
          DO 50 J=1,M
            DO 50 K=1,M
50         P1(I,J)=P1(I,J)+P(K,I)*C(K,I,J)
          DO 55 I=1,M
            DO 55 J=1,M
              IF(ABS(P1(I,J)-P(I,J))-0.001)55,55,60
55         CONTINUE
          DO 56 I=1,M
            P2(I)=0.
          DO 56 J=1,M
56         P2(I)=P2(I)+P1(J,I)
          WRITE(5,75)N,(P2(I),I=1,M)
75         FFORMAT(////,5X,'VETOR DISTRIBUICAO ESTACIONARIA - GER.',I2,
          *//,5X,8F6.3)
          GO TO 80
60     DO 65 I=1,M
          DO 65 J=1,M
65     P(I,J)=P1(I,J)
          N=N+1
          GO TO 40
80     CALL EXIT
      END
```


VII. BIBLIOGRAFIA

1. MACHADO, Dirceu - "Modelos estocásticos para análise e simulação de sequências hidrológicas" - Tese de Mestrado, COPPE 1970.
2. KARTVELISHVILI - "Theory of stochastic processes in hydrology and river regulation" - Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1969.
3. NAYLOR, T. H.; BALINTFY, J.L.; BENDICK, D. S. and CHU, K. - "Computer simulation techniques".
4. MACHADO, Dirceu - "Notas de aula de Hidrologia Estocástica" COPPE, 1971.
5. CLARKE, A. B.; DISNEY, R.L. - "Probability and Random processes for engineers and scientists", John Wiley, 1970.
6. QUIMPO, Rafael - "Stochastic analysis of daily river flows", Colorado States University, Ph.D., 1966.
7. TORANZOS, F. I. - "Estatística", Ed. Mestre Jou, 1969.
8. BHUIYA, R. K. - "Stochastic analysis of periodic hidrologic processes", Journal of the Hydraulics Division ASCE, July, 1971.
9. DUMAS, A. J. and MOREL-SEYTOUX, H. J. - "Statiscal discrimination of chance in daily runoff", Hydrology Papers, Colorado States University, August, 1969.

10. WOLD, H.O.A. - "Series cronologicas estacionaris" - Universidad de Locknow, 1950.
11. NATALAS, N.C. - "Autocorrelation of rainfall and stream flow minimums", Geological Survey Professional Paper, 1963.
12. MEYER, P. L. - "Probabilidade - Aplicações à Estatística" - Ao Livro Técnico, 1969.
13. BARTLETT - "Introduction to stochastic processes" - Cambridge, 1962.
14. GHOSH, B. K. - "Sequential tests of statistical Hypotheses", Addison-Wesley, 1970.
15. MELLO, J. M. - Tese de Mestrado, COPPE, 1969.
16. CHUNG, K. L. - "Markov Chains with stationary transition probabilities", Stanford University, 1967.
17. MACHADO, Dirceu - "Considerações sobre um modelo estocástico de simulação hidrológica", Congresso de Hidrologia, Porto Alegre, 1972.